Variabili aleatorie

ES Supponiamo di estrarre una carta da un mazzo di 52.
Punti 1€ sull'uscita del "k cuori"
" 1€ sull'uscita di una carta di fiori.
Se esce "k cuori" ottengo 52 €
fiori " 4 €.

Probabilità di vittoria?

Ω universo associato all'estrazione
$\mathbb{P}$ prob. su Ω

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ vincita

$X(\text{k cuori}) = 50 = 52-2$

$X(\text{carta di fiori}) = 2 = 4-2$

$X(\text{carta}) = -2$
$\neq$ k cuori, fiori

$$\mathbb{P}_X(50) = \mathbb{P}(X=50) = \mathbb{P}(\overbrace{\{\omega\in\Omega \,/\, X(\omega)=50\}}^{\text{evento in } \Omega}) =$$
$$= \mathbb{P}(X^{-1}(50)) = \frac{1}{52}$$

$$\mathbb{P}_X(2) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{4} = \frac{13}{52}$$

$$\mathbb{P}_X(-2) = \mathbb{P}(X=-2) = \frac{38}{52}$$

$$\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X=x) = 0 \quad \text{se } x \notin \{-2, 2, 50\}$$

$\mathbb{P}_X$ è una prob. su $\mathbb{R}$.

$X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. per ogni $A \subset \mathbb{R}$ misurabile

$$X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$$

è una <u>variabile aleatoria</u> (a valori reali)

<u>Def.</u> Data una v.a. $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, si chiama <u>legge di probabilità</u> di X (distribuzione di prob.) la funzione $\mathbb{P}_X : \{$insiemi misurabili di $\mathbb{R}\} \to [0,1]$ definita da

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}) \quad \forall A \subset \mathbb{R} \text{ mis.}$$

<u>notaz</u> $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

<u>OSS</u> Una legge di prob. è una prob. su $\mathbb{R}$.

<u>Def</u> Due v.a. X e Y a valori reali si dicono <u>equidistribuite</u> se $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

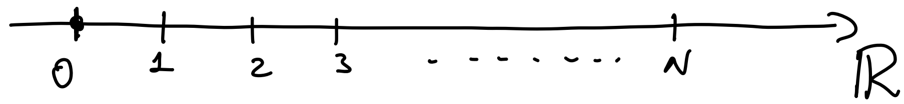
<u>Def</u> Una v.a. X a valori reali si dice <u>discreta</u> se la sua legge di prob. $\mathbb{P}_X$ è una prob. su $\mathbb{R}$ discreta (quindi esiste una funzione di massa, $\{x_1, x_2 \dots\}$ finito o numerabile in $\mathbb{R}$ e $x_i \longmapsto p_i := \mathbb{P}_X(x_i)$).

$$p_i \in [0,1], \ \sum_{x_i} \mathbb{P}_X(x_i) = 1$$

Def Una v.a. X a valori reali si dice <u>con densità</u> se la sua legge di prob. $\mathbb{P}_X$ è una prob. su $\mathbb{R}$ con densità (quindi esiste $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ integrabile e t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, per cui $\forall A \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,dx \quad)$$

<u>Esempio</u> (passeggiata aleatoria)



Lancio una moneta N volte, resto fermo se esce "C" e mi muovo di $+1$ se esce "T".

Sia p la prob. che esce "T" ad ogni lancio.

$X_N : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ X_N indica la posizione finale

X_N assume valori in $\mathbb{N}_0$ compresi tra 0 e N.

$(\Rightarrow \mathbb{P}_X(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{N}_0 \cap [0, N])$.

Se $x \in \mathbb{N}_0 \cap [0, N]$

$\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}($ escono x "T" e $N-x$ "C" $) =$

$$= \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

<u>ES</u> $N = 4$, $x = 2$ $\quad$ {CCTT, CTCT, TCCT, TCTC, CTTC, TTCC}

$\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$

Def Si chiama <u>v.a. Binomiale</u> di <u>parametri n e p</u> con $n \geq 1$, $p \in [0,1]$ che assume valori in $\mathbb{N}_0$ tra 0 e n, con legge

$$p(h) = \mathbb{P}(X=h) = \begin{cases} \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} & , \ h \in \mathbb{N}_0 \cap [0,n] \\ 0 & , \ \text{alt.} \end{cases}$$

(ripetizione di un esperimento con $n = \#$ ripetizioni, p = prob. di successo, X conta il num. di successi)

$$\boxed{X \sim B(n,p)}$$

<u>ES</u> $n=1$, $X \sim B(1,p)$ <u>v.a. di Bernoulli</u> di <u>param. p</u>

<u>Esempio</u> Qual è la legge della v.a. che conta quanti "2" ottengo lanciando 10 volte un dado?

$$X \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$$

<u>Esempio</u> Supponiamo di partire da 0 in $\mathbb{R}$, e lancio N volte una moneta, con p la prob. che esce "T", e mi sposto di $+1$ se esce "T" e di -1 se esce "C".

Costruire Y_N che indica la posizione dopo N lanci.

Y_N è una v.a. discreta.

$$Y_1 = 2X_1 - 1$$

$$Z \sim B(1,p)$$

$$Y_N = 2X_N - N \quad \Big(= \underbrace{(2Z-1)+(2Z-1)+\dots+(2Z-1)}_{N \text{ volte}}\Big)$$

$$X_N \sim B(N,p)$$

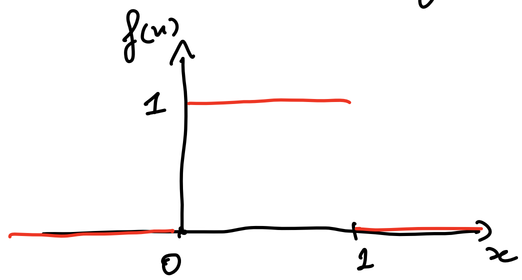
$$\mathbb{P}(Y_N = h) = \mathbb{P}(2X_N - N = h) = \mathbb{P}\left(X_N = \frac{N+h}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}\{\omega \,/\, Y_N(\omega)=h\} = \mathbb{P}\{\omega \,/\, 2X_N(\omega)-N=h\}$$

$$\mathbb{P}(Y_N = 0) = \mathbb{P}\left(X_N = \frac{N}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } N \text{ è dispari} \\ \binom{N}{N/2} p^{N/2}(1-p)^{N/2}, & \text{se } N \text{ è pari} \end{cases}$$

Esempio V.e. con densità

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{alt.} \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$



$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

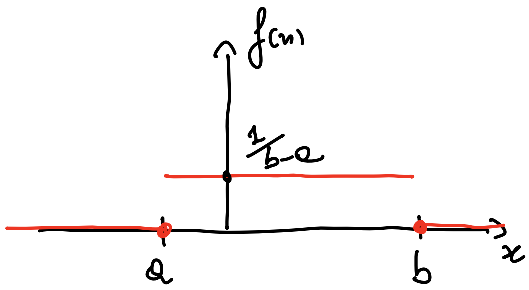
se $[a,b] \subseteq [0,1]$, $\quad \mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b 1\,dx = b-a$

$[a,b] \cap [0,1] = \emptyset$, $\quad$ " $\quad = \int_a^b 0\,dx = 0$

Def Si chiama **v.a. con densità uniforme in $[a,b] \subset \mathbb{R}$** $(a<b)$

la v.a. con legge di prob. con densità data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{alt.} \end{cases}$$

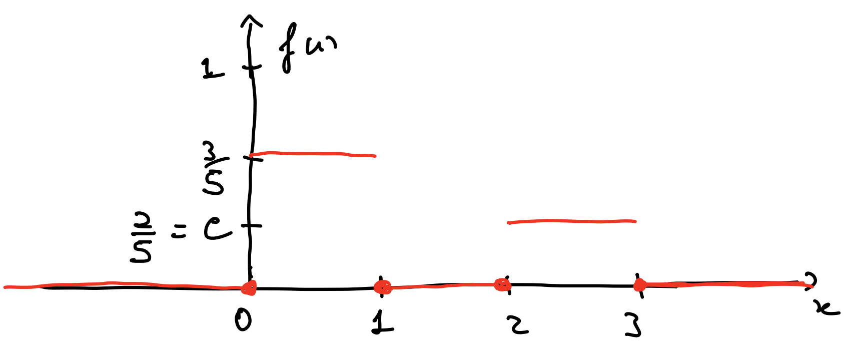


$\left(f(x) \geq 0, \text{ int.}, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \right)$

Esempio Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ o } x \geq 3 \\ 3/5, & 0<x<1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \\ c, & 2<x<3 \end{cases}$$

Determinare $c \in \mathbb{R}$ in modo che f sia la densità di una v.a.



- $f(x) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$
- f integr. ✓
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \overset{=0}{f(x)}\,dx + \int_{0}^{1} \overset{=\frac{3}{5}}{f(x)}\,dx + \int_{1}^{2} \overset{=0}{f(x)}\,dx + \int_{2}^{3} \overset{=c}{f(x)}\,dx +$$

$$+ \int_{3}^{+\infty} \overset{=0}{f(x)}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{5}\,dx + \int_2^3 c\,dx = \frac{3}{5}x\Big|_0^1 + cx\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{3}{5} + c = 1 \implies c = \frac{2}{5}$$

<u>Def</u> Data una v.a. X a valori reali, si chiama FUNZIONE DI RIPARTIZIONE di X, $F_X(x)$, la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definita da

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \left(= \mathbb{P}(X \in (-\infty, x])\right)$$

X v.a. discreta, $\{x_1, x_2, \dots\}$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i) \left(= \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}_X(x_i)\right)$$

X v.a. con densità f,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

<u>OSS</u> È la stessa funzione della statistica descrittiva

$$\{x_1, \dots, x_n\} \qquad F(t) = \frac{\#\{x_i \leq t\}}{n}$$

X v.a. con valori $\{x_1, \dots, x_n\}$ e legge $\mathbb{P}_X(x_i) = \frac{1}{n}$