Ω UNIVERSO

Def Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω si dice <u>σ-algebra</u> se:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$;

(ii) se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c \in \mathcal{A}$;

(iii) se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di eventi ($A_n \in \mathcal{A}$)

allora $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Def Dati Ω e $\mathcal{A}$ σ-algebra, si chiama PROBABILITÀ una funzione $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$

t.c. (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(ii) se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di eventi e due a due incompatibili (ossia $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$), allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

OSS • siano $\{B_n\}_{n \geq 1}$ eventi t.c. $B_n \subset B_{n+1}$ $\forall n \geq 1$,

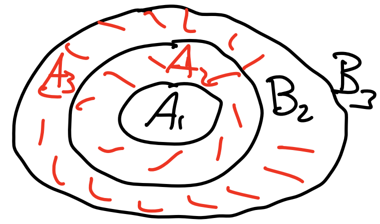
allora $B := \lim_{n \to +\infty} B_n = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ e

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

dim $A_1 := B_1$, $A_n := B_n \setminus B_{n-1}$ $\forall n \geq 2$

allora $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$, e quindi

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$



$$\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{k \geq 1} A_k$$

- $\{B_n\}_{n \geq 1}$ eventi t.c. $B_n \supset B_{n+1} \quad \forall n \geq 1$

allora $B := \lim_{n \to +\infty} B_n = \bigcap_{n \geq 1} B_n$ e

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ numerabile

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra

$\mathbb{P}$ prob. è determinata da $p_i := \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \geq 0$

e t.c. $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$.

<u>OSS</u> Non esiste la distribuzione uniforme

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (s_1 s_2 s_3 \dots) \,/\, s_i \in \{0,1\} \ \forall i \geq 1\}$$

$\mathcal{A}$ σ-algebra generata da $\left\{ cil(s,k,n) \,/\, \begin{matrix} s \in \{0,1\}^n \\ k \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$

$$cil(s,k,n) = \{ \omega \in \Omega \,/\, \omega = (\dots\dots \overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-esimo}}}{s_1} s_2 s_3 \dots s_n} \dots\dots) \}$$

Fissiamo (p,q) con $p,q \geq 0$ e $p+q=1$,

$$\mathbb{P}(cil(s,k,n)) := p^{\#\{i / s_i = 0\}} q^{\#\{i / s_i = 1\}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega\}) = 0.$$

$\boxed{\Omega \subset \mathbb{R}}$

1. Ω spazio discreto

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$, Ω finito o numerabile

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}$ è definita da $p_i := \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \geq 0$ con $\sum p_i = 1$

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

<u>Def</u> La funzione $\omega_i \longmapsto p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ si chiama <u>FUNZIONE DI MASSA</u>

2. <u>ES</u> $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}([0,\tfrac{1}{n}]) = \tfrac{1}{n} \Rightarrow \mathbb{P}(\{0\}) = 0$$

$$\mathbb{P}([a,b]) = b-a$$

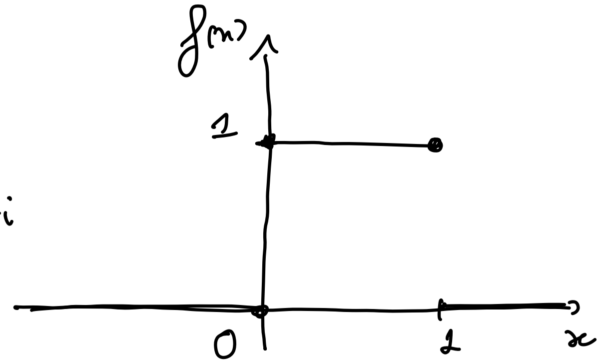
Def Si chiama <u>DENSITÀ DI PROBABILITÀ</u> una funzione $f: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ che sia integrabile e t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Si associa a una densità di probabilità la probabilità $\mathbb{P} : \mathcal{A} = \{\text{insiemi misurabili}\} \to [0,1]$

$$\mathbb{P}(A) := \int_A f(x)\,dx$$

ES

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



f è integrabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

$$[a,b] \subseteq [0,1], \quad \mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a$$

$$[a,b] \cap [0,1], \quad \mathbb{P}([a,b]) = 0$$

OSS $\mathbb{P}(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

---

3. Casi misti

ES

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x}, & 0 \leq x \\ 0, & \text{alt.} \end{cases}$$

$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(A) := \int_A f(x)\,dx + \frac{1}{2} \chi_A(\omega)$$

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \frac{1}{2} \chi_{\mathbb{R}}(\omega) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
