**Matematica III**
**Corso di Ingegneria delle Telecomunicazioni**
**Prova scritta del 10-02-2007**

**Esercizio 1. (10 punti)**
*Sia* $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ x \leq y \leq x - x^3 + 1\}$.
*a) (3 punti) Utilizzare il teorema di Stokes (o Poincaré-Cartan) per calcolare*

$$\int_K x \ dx \wedge dy$$

Poniamo $\omega = x \ dx \wedge dy$. La 2-forma $\omega$ è chiusa e definita su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi è esatta. Una sua primitiva è $\nu = \frac{1}{2}x^2 \ dy$ (oppure $\nu = -xy \ dx$). Il teorema di Stokes ci dice che

$$\int_K \omega = \int_{\partial^+ K} \nu$$

Per concludere bisogna quindi parametrizzare il bordo di $K$. Possiamo scrivere

$$\partial^+ K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

dove: $\Gamma_1$ è il supporto della curva $t \mapsto \gamma_1(t) = (t,t)$ con $t \in [0,1]$; $\Gamma_2$ è il supporto della curva $t \mapsto \gamma_2(t) = (t, t - t^3 + 1)$ con $t \in [0,1]$; $\Gamma_3$ è il supporto della curva $t \mapsto \gamma_3(t) = (0,t)$ con $t \in [0,1]$. Notiamo che $\Gamma_2$ e $\Gamma_3$ così scritte sono orientate in senso anti-orario, quindi l'integrale su di loro dovrà essere preso con il segno meno.

In conclusione otteniamo

$$\int_{\partial^+ K} \nu = \int_0^1 \frac{1}{2}t^2 dt - \int_0^1 \frac{1}{2}t^2(1-3t^2)dt - \int_0^1 0dt = \int_0^1 \frac{3}{2}t^4 dt = \frac{3}{10}$$

*b) (3 punti) Calcolare l'area di* $K$*;*

Usiamo la formula

$$Area(K) := \int_K dx \wedge dy$$

Quindi, se $\omega = dx \wedge dy$, troviamo come sua primitiva $\nu = x \ dy$. Applichiamo di nuovo il teorema di Stokes come sopra e abbiamo

$$Area(K) = \int_{\partial^+ K} xdy = \int_0^1 tdt - \int_0^1 t(1-3t^2)dt - \int_0^1 0dt = \int_0^1 3t^3 dt = \frac{3}{4}$$

*c) (4 punti) Calcolare*

$$\frac{1}{2} \int_{\partial^+ K} x \ dy - y \ dx$$

Poniamo $\nu = \frac{1}{2}(x\ dy - y\ dx)$. Usando nuovamente il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\int_{\partial^+ K} \nu = \int_K d\nu$$

Calcoliamo quindi $d\nu = \frac{1}{2}(dx \wedge dy - dy \wedge dx) = dx \wedge dy$. Quindi

$$\int_K d\nu = \int_K dx \wedge dy = Area(K) = \frac{3}{4}$$

**Esercizio 2. (10 punti)**
*a) (3 punti) Studiare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{z}{z^3 + \frac{1}{n^2}\ z}$$

Cerchiamo i valori per cui si annulla il denominatore di $f(z)$, ossia le soluzioni di

$$z^3 + \frac{1}{n^2}\ z = 0$$

Si trova facilmente che le soluzioni sono: $z_0 = 0$; $z_1 = \frac{i}{n}$; $z_2 = -\frac{i}{n}$. Quindi $f(z)$ ha 3 singolarità.

La singolarità in $z_0 = 0$ è eliminabile, come si deduce dal fatto che

$$\lim_{z \to 0} f(z) = n^2 \in \mathbb{C}$$

Mentre le singolarità $z_{1,2}$ sono poli di ordine 1, come si deduce dal fatto che

$$\lim_{z \to \pm \frac{i}{n}} \left( z \mp \frac{i}{n} \right) f(z) = \pm \frac{n}{2i} \neq 0$$

*b) (7 punti) Utilizzare il metodo dei residui per calcolare*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{n^2}\ x}\ dx$$

Dalla discussione delle singolarità al punto a), deduciamo che possiamo scrivere $f(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{1}{n^2}}$, eliminando la singolarità in $z_0 = 0$. La nuova funzione $f(z)$ non ha singolarità reali, quindi possiamo scegliere di integrare lungo il cammino

$$C_R := \gamma_R \cup \Gamma_R$$

dove $t \mapsto \gamma_R(t) = t$ con $t \in [-R, R]$, e $\theta \mapsto \Gamma_R(\theta) = R\exp(i\theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$. Otteniamo

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{n^2}} + \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{R^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{n^2}} = 2\pi i\ Res\left(f(z), \frac{i}{n}\right)$$

essendo $z_1 = \frac{i}{n}$ l'unica singolarità di $f(z)$ contenuta all'interno della curva chiusa $C_R$.

D'altra parte

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{n^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{n^2}\ x}\ dx$$

mentre

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{R^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{n^2}} \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R\ d\theta}{R^2} = \frac{\pi}{R}$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{n^2}\ x}\ dx = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\ dz = 2\pi i\ Res\left(f(z), \frac{i}{n}\right)$$

Infine ricordiamo che

$$Res\left(f(z), \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{z + \frac{i}{n}}\Big|_{z=\frac{i}{n}} = \frac{n}{2i}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3 + \frac{1}{n^2}\ x}\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \frac{2\pi i n}{2i} = \pi$$

**Esercizio 3. (14 punti)**

*Un professore disperato si lancia da un aereo in volo. La sua caduta segue la legge oraria*

$$\ddot{x}(t) = -g - k\dot{x}(t)$$

*dove $k > 0$ è un coefficiente di attrito dato dalla resistenza dell'aria che varia a seconda che il paracadute sia chiuso o aperto.*

*a) (4 punti) trovare l'integrale generale del moto;*

Se riscriviamo l'equazione come

$$\ddot{x} + k\dot{x} = -g$$

l'integrale generale si trova sommando una soluzione particolare alle soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono della forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti e $\lambda_1, \lambda_2$ sono le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ associato all'equazione. In questo caso

$$p(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda = \lambda(\lambda + k)$$

e le radici sono quindi $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -k < 0$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-kt}$$

Una soluzione particolare si trova ponendo $\bar{x}(t) = At + B$ e sostituendo nell'equazione. Si trova $A = -\frac{g}{k}$ e $B$ qualsiasi.

L'integrale generale del moto è quindi dato da

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}\, t$$

*b) (3 punti) qual è la velocità asintotica del moto (ossia il $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$) ?*

Dal punto precedente troviamo

$$\dot{x}(t) = -kc_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

quindi, usando $k > 0$, otteniamo che la velocità asintotica è $\dot{x}(\infty) = -\frac{g}{k}$.

*c) (7 punti) supponiamo che il professore si lanci da un'altezza $x(0) = 990$ metri con velocità iniziale $\dot{x}(0) = 0$ metri al secondo, e cada inizialmente con il paracadute chiuso, quindi con $k = 1$. Dopo $t_1 = \log_e 10$ secondi, apre il paracadute, e quindi il coefficiente di attrito diventa $k = 5$. Ponendo $g = 10$, dopo quanti secondi $T > t_1$ avrà raggiunto velocità $\dot{x}(T) = -6$ metri al secondo?*

Si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$(I) \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -10 \\ x(0) = 990 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

per $t \in [0, t_1]$, e se $x_1(t)$ è la soluzione di (I), risolvere poi

$$(II) \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) = -10 \\ x(t_1) = x_1(t_1) \\ \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1(t_1) \end{cases}$$

per $t > t_1$.

Usando i punti precedenti, la soluzione di (I) è data da

$$x_1(t) = c_1 + c_2 e^{-t} - 10t$$

con $c_1$ e $c_2$ che devono soddisfare

$$\begin{cases} x_1(0) = c_1 + c_2 = 990 \\ \dot{x}_1(0) = -c_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

da cui si trova

$$x_1(t) = 1000 - 10e^{-t} - 10t$$

Quindi troviamo $x_1(t_1) = 999 - 10\log_e 10$ metri e $\dot{x}_1(t_1) = -9$ metri al secondo.

Possiamo allora risolvere il problema (II). La soluzione di (II) è data da

$$x_2(t) = c_1 + c_2 e^{-5t} - 2t$$

con $c_1$ e $c_2$ che devono soddisfare

$$\begin{cases} x_2(\log_e 10) = c_1 + c_2 10^{-5} - 2\log_e 10 = 999 - 10\log_e 10 \\ \dot{x}_2(\log_e 10) = -5c_2 10^{-5} - 2 = -9 \end{cases}$$

Cerchiamo $T > t_1$ tale che $\dot{x}(T) = -6$ metri al secondo. Quindi, poiché $T > t_1$ dobbiamo usare la soluzione $x_2(t)$ e imporre $\dot{x}_2(T) = -6$. Si trova che deve essere $-5c_2 e^{-5T} - 2 = -6$, quindi per risolvere l'esercizio basta sapere chi è $c_2$.

Facendo i calcoli si trova $c_2 = \frac{7}{5}10^5$ e quindi

$$T = \log_e 10 + \frac{1}{5}\log_e \frac{7}{4}$$