Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 30-06-2022

Esercizio 1. (12 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - xy - 2x \\ \dot{y} = -y^2 + \mu\, xy \end{cases}$$

al variare di $\mu \in (0, +\infty)$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 5y \\ \dot{y} = r\,x - y - xz \\ \dot{z} = -3z + xy \end{cases}$$

(a) Per $r \in (0,1)$, trovare i punti fissi del sistema e dire se sono iperbolici.

(b) Per $r \in (0,1)$, usare il metodo della funzione di Lyapunov per determinare il dominio di asintotica stabilità dei punti fissi asintoticamente stabili.

(c) *Facoltativo: discutere la stabilità dell'origine nel caso* $r = 1$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 4x\,, & \text{se } x \in J_1 := [0, \frac{1}{4}]; \\ -x + \frac{5}{4}\,, & \text{se } x \in J_2 := [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ x + \frac{1}{4}\,, & \text{se } x \in J_3 := [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ -\lambda x + \frac{3}{4}\lambda + 1\,, & \text{se } x \in J_4 := [\frac{3}{4}, 1]; \end{cases}$$

per $\lambda \in [1,4]$.

(a) Si studi la stabilità dei punti fissi del sistema al variare di λ.

(b) Al variare di λ, si costruisca l'f_λ-grafo associato alla partizione $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$.

(c) Si discuta il comportamento caotico delle mappe f_λ per $\lambda \geq 2$.

ES. 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - xy - 2x \\ \dot{y} = -y^2 + \mu xy \end{cases} \quad \text{con} \quad \mu \in (0, +\infty)$$

Punti fissi Sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x(x+y+2) = 0 \\ -y(y-\mu x) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $x=0$ oppure $x = -y-2$, e dunque si trova il punto fisso

$$\boxed{P_1 = (0,0)}$$

e le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = -y-2 \\ -y(y + \mu y + 2\mu) = 0 \end{cases}$$

Troviamo questi altri due punti fissi

$$\boxed{P_2 = (-2, 0), \qquad P_3 = \left(-\frac{2}{1+\mu}, -\frac{2\mu}{1+\mu}\right)}$$

che risultano sempre ben definiti in quanto $\mu > 0$.

La matrice jacobiana del campo è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -2x-y-2 & -x \\ \mu y & -2y + \mu x \end{pmatrix}$$

da cui:

- $JF(P_1) = JF(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e dunque P_1 non è iperbolico;

- $JF(P_2) = JF(-2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2\mu \end{pmatrix}$, che ha $\det = -4\mu < 0$ $\forall\, \mu > 0$, e dunque P_2 è un punto iperbolico di tipo sella $\forall\, \mu > 0$, e gli autovettori sono $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ per l'autovalore $\lambda_1 = 2$, e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1+\mu) \end{pmatrix}$ per l'autovalore $\lambda_2 = -2\mu$;

- $JF(P_3) = JF\left(-\frac{2}{1+\mu}, -\frac{2\mu}{1+\mu}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\mu} & \frac{2}{1+\mu} \\ -\frac{2\mu^2}{1+\mu} & \frac{2\mu}{1+\mu} \end{pmatrix}$,

che ha $\det = \frac{1}{(1+\mu)^2}\left[4\mu + 4\mu^2\right] = \frac{4\mu}{1+\mu} > 0 \quad \forall\, \mu > 0$,

e $tr = \frac{2+2\mu}{1+\mu} = 2 > 0$. Gli autovalori della matrice sono

$$\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu}{1+\mu}} = 1 \pm \sqrt{\frac{1-3\mu}{1+\mu}},$$

e quindi

- $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$, $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ per $\mu \in (0, 1/3)$ e P_3 è nodo instabile;

- $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ per $\mu \in (1/3, +\infty)$ e P_3 è un fuoco instabile;

- $\lambda_+ = \lambda_- = 1$ per $\mu = 1/3$, e la matrice $JF(P_3) - I$ ha rango 1, quindi P_3 è un nodo instabile improprio.

Insiemi invarianti Sono invarianti gli assi cartesiani, infatti se $I_1(x,y) = x$ si ha $\dot{I}_1\big|_{I_1=0} = -x(x+y+2)\big|_{x=0} \equiv 0$, e se $I_2(x,y) = y$ si ha $\dot{I}_2 \big|_{I_2=0} = -y(y-\mu x)\big|_{y=0} \equiv 0$.

<u>Orbite periodiche</u> Per la teoria dell'indice di Poincaré e per il fatto che gli assi sono invarianti, le orbite periodiche possono esistere solo nel quadrante $X = \{x<0,\ y<0\}$ intorno al punto fisso P_3.

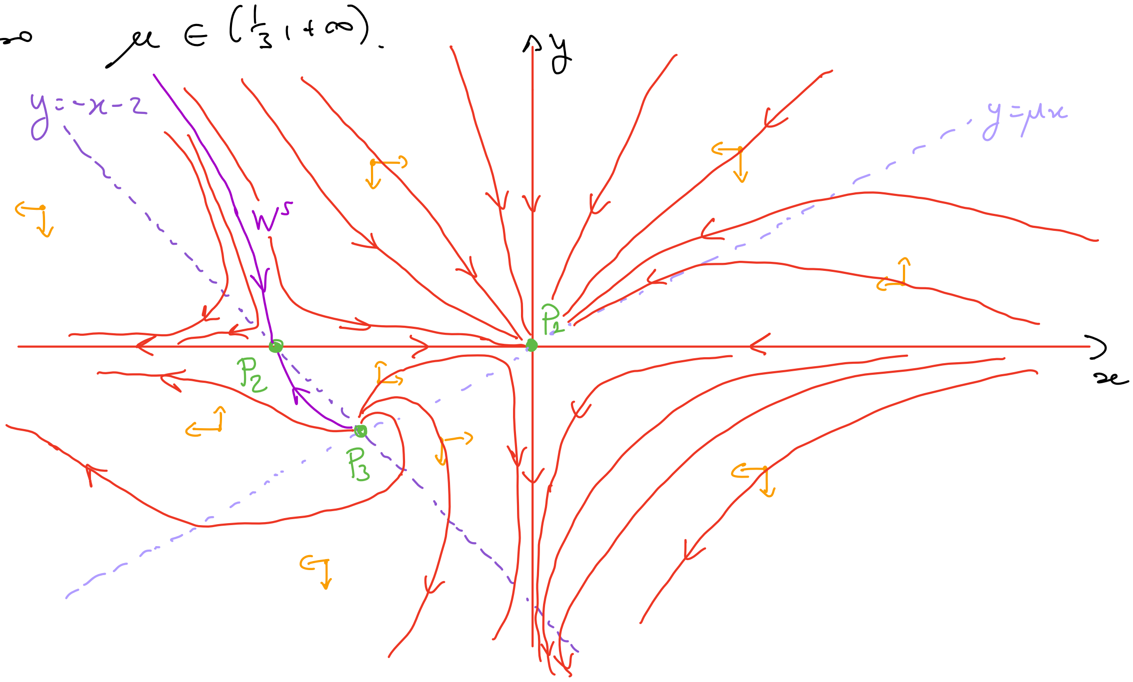
Si consideri la funzione $\rho(x,y) = \frac{1}{xy} > 0 \ \forall (x,y) \in X$, e scriviamo $F(x,y) = (f(x,y),\ g(x,y))$ per il campo di vettori. Si ha che

$$\mathrm{div}\left(\rho(x,y)F(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x+y+2}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y-2\mu x}{x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{y} - \frac{1}{x} > 0 \quad \forall (x,y) \in X$$

quindi per il criterio di Bendixson-Dulac non esistono orbite periodiche.

<u>Ritratto di fase</u> Usiamo le informazioni ottenute e il segno del campo per disegnare il ritratto di fase, intanto nel caso $\mu \in (\frac{1}{3}, +\infty)$.



I casi $\mu = \frac{1}{3}$ e $\mu \in (0, \frac{1}{3})$ differiscono solo per la dinamica locale intorno a P_3.

<u>ES. 2</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 5y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -3z + xy \end{cases}$$

(a) Poniamo $r \in (0,1)$. I punti fissi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 5(-x+y) = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ 3z = xy \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $x = y$, che sostituita nelle altre due restituisce il sotto-sistema

$$\begin{cases} (r-1-z)x = 0 \\ 3z = x^2 \end{cases}$$

e quindi $x = 0$ oppure $z = r-1 < 0$.

Da $x = 0$ si ottiene il punto fisso $\boxed{P = (0,0,0)}$, mentre da $z = r-1$, si ottiene $x^2 = 3(r-1) < 0$ che non ha soluzioni.

La matrice jacobiana del campo è

$$JF(x,y,z) = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -3 \end{pmatrix}$$

da cui $JF(P) = JF(0,0,0) = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ che

ha autovalori $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = -3 \pm \sqrt{4+5r}$.

Per $r \in (0,1)$, si ha $\lambda_2 < \lambda_3 < 0$, e dunque

P è iperbolico ed è un pozzo, quindi asintoticamente stabile.

(b) Cerchiamo una funzione di Lyapunov stretta per $P = (0,0,0)$ della forma $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ con $a, b, c \in (0, +\infty)$.

$$\dot{V}(x,y,z) = 2\left(ax\dot{x} + by\dot{y} + cz\dot{z}\right) =$$

$$= 2\left(-5ax^2 + 5axy + brxy - by^2 - bxyz - 3cz^2 + \right.$$
$$\left. + cxyz\right)$$

Per eliminare il termine misto in xyz poniamo $b = c$, da cui

$$\dot{V}(x,y,z) = 2\left(-5ax^2 - by^2 + (5a + br)xy - 3bz^2\right)$$

Se poniamo $5a = b = c$, possiamo quindi scrivere

$$\dot{V}(x,y,z) = 2b\left[\left(-x^2 - y^2 + (1+r)xy\right) - 3z^2\right]$$

Studiamo il termine $W(x,y) = x^2 + y^2 - (1+r)xy$.

Se $xy < 0$, allora $W(x,y) \geq x^2+y^2$, e dunque

$$\dot{V}(x,y,z) \leq 2b\left(-x^2-y^2-3z^2\right) < 0$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \cap \{xy<0\}$$

Se $xy > 0$, allora $(1+r)xy < 2xy$ perché $r \in (0,1)$, e quindi $W(x,y) = (x-y)^2 + (1-r)xy > 0$ per ogni $(x,y) \in \{xy>0\}$. Quindi

$$\dot{V}(x,y,z) = 2b\left(-(x-y)^2-(1-r)xy-3z^2\right) < 0$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \cap \{xy>0\}$$

Infine se $xy=0$ e $(x,y) \neq (0,0)$ si ha $W(x,y) = x^2+y^2 > 0$, e quindi

$$\dot{V}(x,y,z) = 2b\left(-x^2-y^2-3z^2\right) < 0$$
$$\forall (x,y,z) \in \left(\mathbb{R}^3 \cap \{xy=0\}\right) \setminus \{(0,0,0)\}$$

In conclusione

$$V(x,y,z) = x^2+5y^2+5z^2$$

è funzione di Lyapunov stretta per $P=(0,0,0)$ su $\mathbb{R}^3$.
Quindi $\mathbb{R}^3$ è il dominio di asintotica stabilità di P.

(c) Nel caso $r=1$, l'origine è ancora l'unico punto fisso, ma non è iperbolico. Gli autovalori di $JF(0,0,0)$ sono infatti $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-6$, $\lambda_3=0$.
Tuttavia la funzione

$$V(x,y,z) = x^2+5y^2+5z^2$$

verifica $\quad V(x,y,z) > V(0,0,0) \quad \forall (x,y,z) \neq (0,0,0) \quad$ e

$\dot{V}(x,y,z) = 10\left[-(x-y)^2 - 3z^2\right] \leq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Quindi è ancora funzione di Lyapunov per P su $\mathbb{R}^3$.

Dunque P è stabile nel senso di Lyapunov.

Guardando all'insieme $\{\dot{V}=0\}$ otteniamo

$$\{\dot{V}=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x-y=0,\; z=0\}$$

quindi la retta $x-y=0$ sul piano $z=0$.

Controlliamo se $\{\dot{V}=0\}$ contiene insiemi invarianti diversi da P.

Non ci sono altri punti fissi, dunque altri insiemi invarianti sarebbero orbite. Il campo vettoriale $F(x,y,z)$ soddisfa

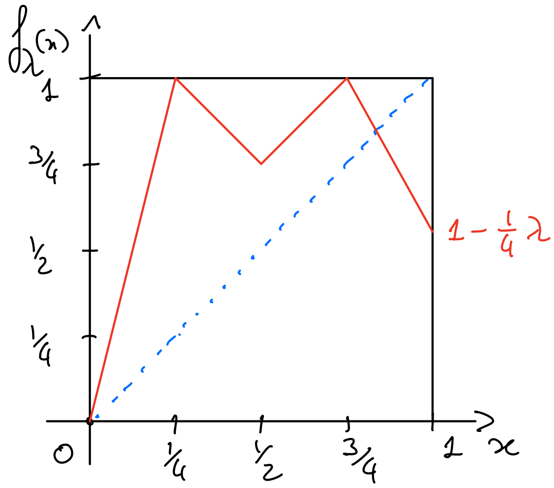
$$F\big|_{\{\dot{V}=0\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \neq \underline{0} \quad \forall (x,y,z) \in \{\dot{V}=0\} \setminus \{(0,0,0)\}$$

e non è tangente a $\{\dot{V}=0\}$. Quindi P è l'unico insieme invariante in $\{\dot{V}=0\}$, e per il principio di La Salle si ha dunque che <u>P è globalmente asintoticamente stabile anche per $r=1$.</u>

ES. 3 $\quad$ Siano $\quad J_1 = [0, \frac{1}{4}], \quad J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \quad J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \quad J_4 = [\frac{3}{4}, 1]$

e

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 4x, & x \in J_1 \\ -x + \frac{5}{4}, & x \in J_2 \\ x + \frac{1}{4}, & x \in J_3 \\ -\lambda x + \frac{3}{4}\lambda + 1, & x \in J_4 \end{cases}, \qquad \lambda \in [1,4]$$



(a) Per ogni $\lambda \in [1,4]$, f_λ ha due punti fissi

$$P_1 = 0 \quad , \quad P_2 = \frac{3\lambda+4}{4(1+\lambda)}$$

- $f_\lambda'(P_1) = f_\lambda'(0) = 4$, quindi P_1 è repulsivo $\forall \lambda \in [1,4]$
- $f_\lambda'(P_2) = -\lambda$, quindi P_2 è repulsivo $\forall \lambda \in (1,4]$

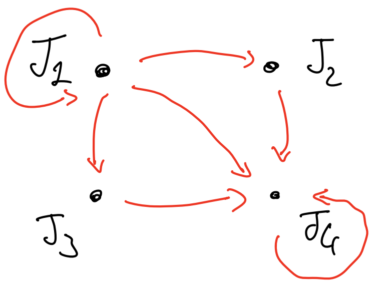
  Se $\lambda = 1$, il punto P_2 è fisso, e l'insieme $[\frac{3}{4},1] \setminus \{P_2\}$ è costituito da orbite periodiche di periodo 2. Quindi P_2 è stabile ma non attrattivo.

(b) L'unico ramo di f_λ che dipende da λ è quello su J_4. Quindi l'f_λ-grafo varia solo per quanto riguarda gli insiemi ricoperti da J_4.

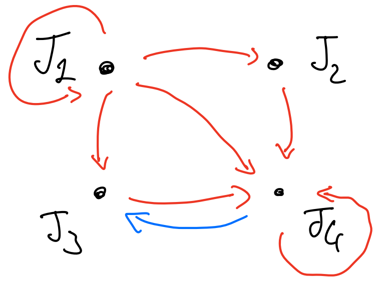
- J_1 ricopre J_1, J_2, J_3, J_4 una volta $\forall \lambda \in [1,4]$
- J_2 " J_4 una volta $\forall \lambda \in [1,4]$
- J_3 " J_4 una volta $\forall \lambda \in [1,4]$

- se $\lambda \in [1,2)$, J_4 ricopre J_4 una volta;
  se $\lambda \in [2,3)$, J_4 " J_3 e J_4 una volta;
  se $\lambda \in [3,4)$, J_4 " J_2, J_3 e J_4 una volta;
  se $\lambda = 4$, J_4 " J_1, J_2, J_3 e J_4 una volta.

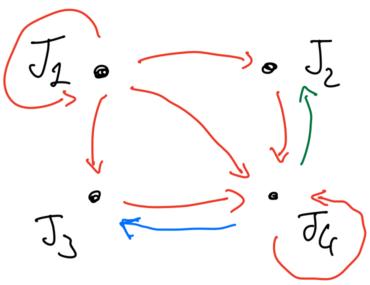
$\boxed{\lambda \in [1,2)}$



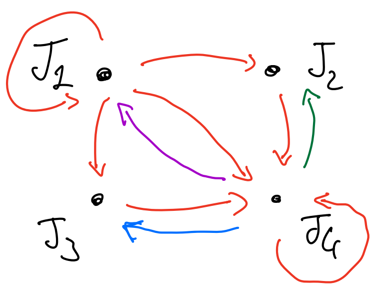
$\boxed{\lambda \in [2,3)}$



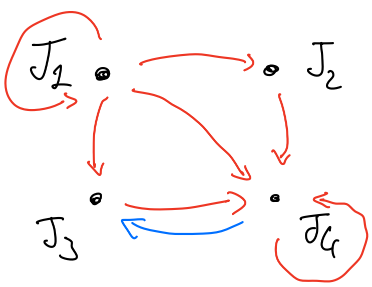
$\boxed{\lambda \in [3,4)}$



$\boxed{\lambda = 4}$



(c) Per $\lambda \geq 2$, l'f_λ-grafo contiene sicuramente il grafo



quindi il cammino $J_4\, J_3\, J_4\, J_4$ è ammissibile $\forall\, \lambda \geq 2$.

Poiché il punto fisso $P_2 \in \mathring{J}_4$ e $P_2 \notin J_3$, il cammino implica l'esistenza di un punto periodico di periodo minimo 3. Poiché f_λ è continua, questo implica che la trasformazione è caotica.