Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 29-01-2019

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+2y^2})$$

i) calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P=(1,2)$ nella direzione $v=(0,1)$;

ii) trovare tutti i punti critici, e dire quali sono punti di minimo assoluto e quali di massimo assoluto;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+2y^2 \leq 1 \, , \, y \geq -\frac{1}{2} \right\} .$$

Esercizio 2. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{y}{(x+1)^2+y^2} \\ \frac{y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) mostrare che è irrotazionale, e dire se è conservativo sul suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro del campo di vettori lungo la curva (γ, I) con $I=[0,\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \left(\frac{1}{2}\sin(2t) \, , \, -\cos t \right)$$

Esercizio 3. (8 punti) Calcolare il volume dell'insieme

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2 \leq \sqrt{1-z^2} \, , \, z \geq 0 \, , \, y \geq 0 \, , \, x+y \geq 0 \right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+2y^2})$$

i) calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (1,2)$ nella direzione $v = (0,1)$;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, ed è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ essendo composizione delle funzioni $g(t) = \sin t$ e $h(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$. Quindi f è differenziabile in P, ed esistono dunque in P tutte le derivate direzionali. In particolare per $v = (0,1)$ si ha per definizione

$$D_v f(1,2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}} \cos(\sqrt{x^2+2y^2})\Big|_{(x,y)=(1,2)} = \frac{4}{3}\cos 3$$

dove abbiamo usato che f è differenziabile in tutto un intorno di P.

ii) trovare tutti i punti critici, e dire quali sono punti di minimo assoluto e quali di massimo assoluto;

I punti critici sono i punti in cui la funzione è differenziabile e in cui il gradiente si annulla. Abbiamo osservato che f è certamente differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vediamo se lo è anche in $(0,0)$. Verifichiamo innanzitutto se esistono le derivate parziali in $(0,0)$. Iniziamo con quella lungo la x, per cui studiamo l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

Il limite non esiste, e dunque la funzione non ammette derivata parziale lungo la x in $(0,0)$. Quindi non è differenziabile in $(0,0)$.

I punti critici sono quindi i punti in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in cui si annulla il gradiente, ossia i punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} \cos(\sqrt{x^2+2y^2}) = 0 \\ \frac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2}} \cos(\sqrt{x^2+2y^2}) = 0 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

La condizione $(x,y) \neq (0,0)$ implica che i punti critici sono quelli per cui $\cos(\sqrt{x^2+2y^2}) = 0$, quindi sono tutti i punti della forma

$$\sqrt{x^2+2y^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2y^2 = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$$

per ogni $k = 0,1,2\ldots$. Si tratta di ellissi concentriche con semiassi $\frac{\pi}{2} + k\pi$ lungo l'asse x, e $\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{\sqrt{2}}$ lungo l'asse y.

Sostituendo nella funzione f i punti critici, otteniamo

$$\sin(\sqrt{x^2+2y^2}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$$

quindi i punti critici sono punti di massimo assoluto se k è pari, e punti di minimo assoluto se k è dispari.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x, y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + 2y^2 \leq 1 \, , \, y \geq -\frac{1}{2} \right\} .$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω

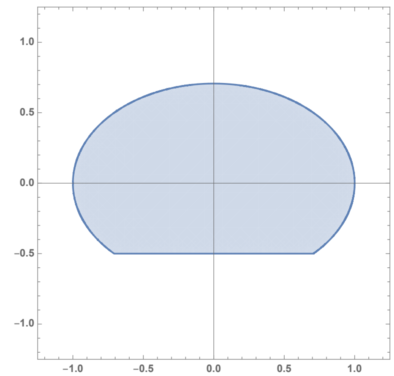

Figure 1: L'insieme Ω.

dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che la funzione è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, e non è differenziabile in $C = (0, 0)$, che è interno a Ω, e quindi è il primo punto da prendere in considerazione.

I punti critici liberi sono stati trovati al punto precedente, e sono i punti della forma $x^2 + 2y^2 = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Poiché i punti in Ω soddisfano $x^2 + 2y^2 \leq 1$ e $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > 1$, non ci sono punti critici liberi in Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + 2y^2 = 1 \, , \, y \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ y = -\frac{1}{2} \, , \, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Per quanto riguarda Γ_1 potremmo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(\cos t \, , \, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right) , \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \right] ,$$

e comporre con f. Osserviamo comunque che poiché per definizione f è costante sugli insiemi di livello della funzione $G(x,y) = x^2 + 2y^2$, e Γ_1 è una parte di un insieme di livello di G, si ha che

$$f(x,y)\Big|_{(x,y)\in\Gamma_1} = \sin(\sqrt{1}) = \sin 1$$

e dunque tutti i punti di Γ_1 sono punti critici vincolati, e il valore che ci interessa è $\sin 1$.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(t\,,\, -\frac{1}{2}\right), \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \sin\left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{2}}\right), \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Risulta $g_2'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}} \cos\left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{2}}\right)$. Nell'intervallo $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ si ha $\frac{1}{2} \leq t^2 + \frac{1}{2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, dunque l'unico punto critico è $t = 0$, a cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = f|_{\Gamma_1} = \sin 1\,, \quad f(Q) = \sin\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Essendo la funzione $\sin t$ crescente per $t \in [0,1]$, si ha che il massimo di f è $\sin 1$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{y}{(x+1)^2+y^2} \\ \frac{y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

i) mostrare che è irrotazionale, e dire se è conservativo sul suo dominio naturale;

Il dominio naturale del campo $\mathbf{F}$ è l'insieme $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0), (-1,0)\}$. Il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale visto che

$$\text{rot } \mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0$$

essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{2(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^2} + \frac{(x+1)^2 + y^2 - 2y^2}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{2(x-1)y}{((x-1)^2+y^2)^2} - \frac{(x+1)^2 + y^2 - 2(x+1)^2}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

Il dominio naturale X del campo non è semplicemente connesso, dunque per vedere se $\mathbf{F}$ è conservativo dobbiamo calcolarne il lavoro lungo due curve intorno ai due punti $(1,0)$ e $(-1,0)$.

Alternativamente, osserviamo che $\mathbf{F}$ si scrive come somma dei due campi

$$\mathbf{G}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \\ \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{(x+1)^2+y^2} \\ -\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Il campo $\mathbf{G}$ ha dominio naturale $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, ed è conservativo, con potenziale $g(x,y) = \frac{1}{2}\log\big((x-1)^2+y^2\big)$. Il campo $\mathbf{H}$ ha dominio naturale $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$, è irrotazionale ma non è conservativo sul suo dominio naturale, come si può verificare calcolando il lavoro di $\mathbf{H}$ lungo la curva (γ, I) con $I = [0, 2\pi]$ e parametrizzazione $\gamma(t) = (-1+\cos t, \sin t)$. Si trova infatti che

$$L(\mathbf{H}, \gamma) = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} > dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

In particolare si trova che il campo $\mathbf{F}$ non è conservativo sul suo dominio naturale.

ii) calcolare il lavoro del campo di vettori lungo la curva (γ, I) con $I = [0,\pi]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\frac{1}{2}\sin(2t)\,,\, -\cos t\Big)$$

La curva (γ, I) ha punto iniziale $P = \gamma(0) = (0,-1)$ e punto finale $Q = \gamma(\pi) = (0,1)$, inoltre il sostegno Γ è tutto contenuto nell'insieme $\Omega = \{-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$. In particolare il sostegno Γ è quello rappresentato in figura 2. Il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale e l'insieme Ω è semplicemente connesso, quindi

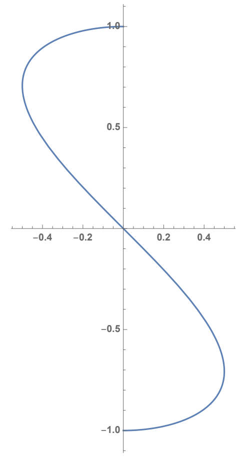

Figure 2: Il sostegno Γ.

$\mathbf{F}$ è conservativo su Ω. Possiamo quindi calcolare il lavoro lungo (γ, I) usando un'altra curva con gli stessi punti iniziali e finali, e sostegno contenuto in Ω. Possiamo scegliere la curva

$$\tilde{\gamma} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \tilde{\gamma}(t) = (0,t)$$

e troviamo dunque

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_{-1}^{1} < \begin{pmatrix} \frac{-1}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2} \\ \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} > dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log(1+t^2) - \arctan t \right) \Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2} .$$

Esercizio 3. *Calcolare il volume dell'insieme*

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le \sqrt{1-z^2}\,,\, z \ge 0\,,\, y \ge 0\,,\, x+y \ge 0 \right\}$$

L'insieme V è un solido di rotazione intorno all'asse z, dove a ruotare è il grafico della funzione $g(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{4}}$ per $z \in [0,1]$ (la condizione $z \le 1$ deriva dal dominio di g, e la condizione $z \ge 0$ è imposta nella definizione di V). Dunque V si scrive come

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le z \le 1\,,\, x^2+y^2 \le g^2(z)\,,\, y \ge 0\,,\, x+y \ge 0 \right\}$$

e usiamo l'integrazione per strati con

$$V_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le g^2(z)\,,\, y \ge 0\,,\, x+y \ge 0 \right\}$$

Dunque

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{V_z} 1\, dxdy \right) dz$$

Calcoliamo prima l'integrale doppio su V_z usando le coordinate polari

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho .$$

Si trova che

$$\iint_{V_z} 1\, dxdy = \iint_{S_z} \rho\, d\rho d\theta$$

dove

$$S_z = \left\{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \,:\, \rho^2 \le g^2(z)\,,\, \rho\sin\theta \ge 0\,,\, \rho\cos\theta + \rho\sin\theta \ge 0 \right\}$$

Dalla prima condizione si ottiene $\rho \in [0, g(z)]$, e dalla seconda e dalla terza si ottiene $\theta \in [0, \frac{3}{4}\pi]$. Dunque

$$S_z = \left\{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times (-\pi,\pi) \,:\, \rho \in [0,g(z)]\,,\, \theta \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right] \right\}$$

e quindi

$$\iint_{V_z} 1\, dxdy = \iint_{S_z} \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \left(\int_0^{g(z)} \rho\, d\rho \right) d\theta = \frac{3}{8}\pi\, g^2(z) = \frac{3}{8}\pi \sqrt{1-z^2}$$

Concludiamo quindi con

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{V_z} 1\, dxdy \right) dz = \frac{3}{8}\pi \int_0^1 \sqrt{1-z^2}\, dz = \frac{3}{32}\pi^2 .$$