Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 26-01-2023

Esercizio 1. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \, (-x - y + 2\mu) \\ \dot{y} = y \, (x - y - 2) \end{cases}$$

in $X = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0 \, , \, y \geq 0 \big\}$ e al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

(a) Trovare i punti fissi e determinare la stabilità di quelli iperbolici.

(b) Studiare l'esistenza di orbite periodiche contenute in X.

(c) Disegnare il ritratto di fase nei casi $\mu = 0, 1, 2$. Ricavare in particolare la stabilità dei punti fissi non iperbolici.

Esercizio 2. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu \, y \\ \dot{y} = x - x^3 - \mu \, y^3 \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la mappa

$$f : [0,1] \to [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & \text{se } x \in \big[0, \frac{1}{3}\big], \\ x - \frac{1}{3}, & \text{se } x \in \big[\frac{1}{3}, 1\big]. \end{cases}$$

(a) Determinare l'espressione analitica di f^2.

(b) Trovare per f un'orbita di periodo minimo 2 e studiarne la stabilità.

(c) Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste per f un'orbita periodica di periodo minimo n.

$\boxed{\text{ESERCIZIO } 1}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(-x-y+2\mu) \\ \dot{y} = y(x-y-2) \end{cases}$$

in $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ e con $\mu \in [0,+\infty)$.

(a) I punti fissi sono le soluzioni in X e con $\mu \in [0,+\infty)$ di

$$\begin{cases} x^2(-x-y+2\mu) = 0 \\ y(x-y-2) = 0 \end{cases}$$

Si trovano i punti

$$\boxed{P_1 = (0,0), \quad P_2 = (2\mu, 0), \quad P_3 = (\mu+1, \mu-1) \text{ se } \mu \geq 1.}$$

Calcoliamo $JF(x,y)$ e valutiamola nei punti fissi.

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - 2xy + 4\mu x & -x^2 \\ y & x-2y-2 \end{pmatrix}$$

- P_1.

$$JF(P_1) = JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det JF(P_1) = 0, \quad \operatorname{tr} JF(P_1) = -2$$

Quindi <u>P_1 è punto fisso non iperbolico $\forall \mu \geq 0$</u>

- P_2. È diverso da P_1 per $\mu > 0$.

$$JF(P_2) = JF(2\mu, 0) = \begin{pmatrix} -4\mu^2 & -4\mu^2 \\ 0 & 2\mu-2 \end{pmatrix}, \quad \det JF(P_2) = -8\mu^2(\mu-1), \quad \operatorname{tr} JF(P_2) = -4\mu^2 + 2\mu - 2 < 0 \ \forall \mu \geq 0$$

Per <u>$\mu \in (0,1)$</u> si ha $\det JF(P_2) > 0$, quindi <u>P_2 è iperbolico</u>. Poiché $\operatorname{tr} JF(P_2) < 0$ il punto <u>P_2 è asintoticamente stabile</u>.

Per <u>$\mu = 1$</u> si ha $\det JF(P_2) = 0$, quindi <u>P_2 non è iperbolico</u>.

Per <u>$\mu > 1$</u> si ha $\det JF(P_2) < 0$, quindi <u>P_2 è iperbolico</u> ed è un punto <u>instabile</u> di tipo sella.

- P_3. Esiste ed è diverso da P_2 per $\mu > 1$.

$$JF(P_3) = JF(\mu+1, \mu-1) = \begin{pmatrix} -(\mu+1)^2 & -(\mu+1)^2 \\ \mu-1 & -(\mu-1) \end{pmatrix}, \quad \det JF(P_3) = 2(\mu+1)^2(\mu-1) > 0 \quad \forall \mu > 1$$
$$\operatorname{tr} JF(P_3) = -(\mu+1)^2 - (\mu-1) < 0 \quad \forall \mu > 1$$

Per ogni $\mu > 1$ il punto P_3 è iperbolico poiché $\det JF(P_3) > 0$ e $\operatorname{tr} JF(P_3) < 0$.
Inoltre è asintoticamente stabile poiché $\operatorname{tr} JF(P_3) < 0$.

(b) All'interno dell'insieme X un'orbita periodica può esistere solo se circonda un punto fisso, e poiché $P_1, P_2 \in \partial X$, l'orbita periodica dovrebbe circondare P_3.
Quindi se $\mu \in [0,1]$ certamente non possono esistere orbite periodiche.

Possiamo poi applicare il Metodo di Bendixson-Dulac su $\mathring{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ con la funzione $\rho(x,y) = \frac{1}{x^2 y}$. Infatti

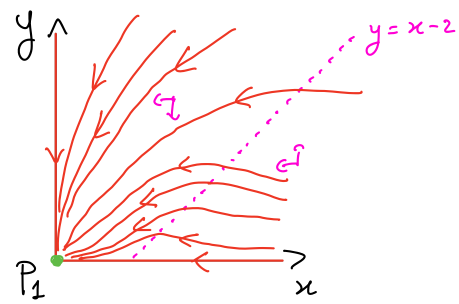
$$\operatorname{div}(\rho F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x+y-2\mu}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y-2}{x^2}\right) = -\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathring{X}$$

Quindi non esistono orbite periodiche in $\mathring{X}$. Poiché le rette $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$ sono invarianti, non esistono orbite periodiche in X $\forall \mu \geq 0$.

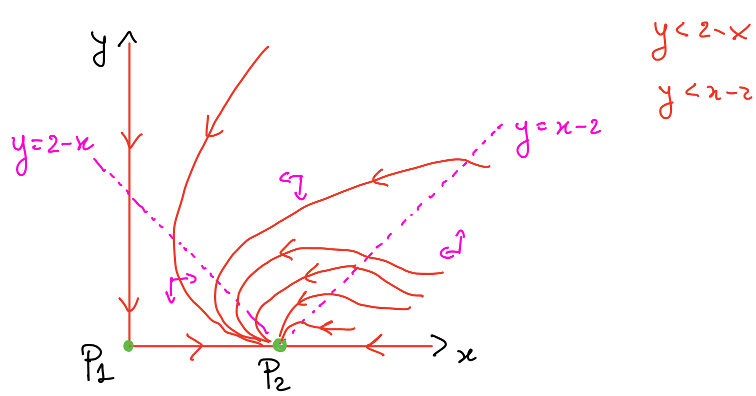
(c) Abbiamo determinato i punti fissi del sistema. Inoltre abbiamo osservato che le rette $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$ sono invarianti poiché $\dot{x}|_{\{x=0\}} = 0$ e $\dot{y}|_{\{y=0\}} = 0$.

$\boxed{\mu = 0}$ $P_1 = P_2 = (0,0)$, P_3 non esiste

In particolare P_1 è asintoticamente stabile.

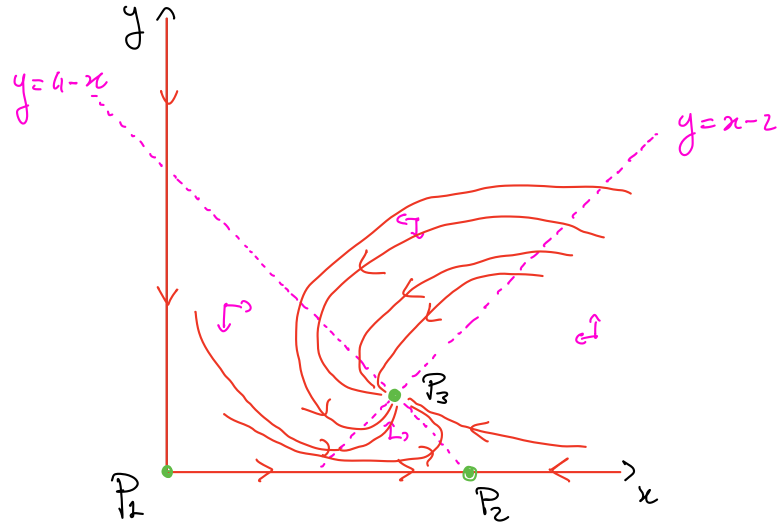


$\boxed{\mu = 1}$ $P_1 = (0,0)$, $P_2 = P_3 = (2,0)$



In particolare P_1 è instabile e P_2 è asintoticamente stabile.

$\boxed{\mu = 2}$ $\quad P_1 = (0,0)$, $P_2 = (4,0)$, $P_3 = (3,1)$



In particolare P_1 è instabile.

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu y \\ \dot{y} = x - x^3 - \mu y^3 \end{cases} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- Punti fissi

$\mu \neq 0$ $\qquad P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (-1,0)$

$\mu = 0$ $\qquad$ Rette $\{x = 0\}$, $\{x = 1\}$, $\{x = -1\}$

- Stabilità lineare dei punti fissi per $\mu \neq 0$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 - 3x^2 & -3\mu y^2 \end{pmatrix}$$

- P_1

$$JF(P_1) = JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \det JF(P_1) = -\mu , \quad \operatorname{tr} JF(P_1) = 0$$

Se $\mu > 0$, P_1 è punto instabile di tipo sella poiché $\det JF(P_1) < 0$.

Se $\mu < 0$, P_1 è non iperbolico

- P_2, P_3

$$JF(P_2) = JF(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \det JF(P_2) = \det JF(P_3) = 2\mu \\ \mathrm{tr}\, JF(P_2) = \mathrm{tr}\, JF(P_3) = 0 \end{matrix}$$

Se $\mu > 0$, P_2 e P_3 non sono iperbolici.

Se $\mu < 0$, P_2 e P_3 sono punti instabili di tipo sella poiché $\det JF < 0$.

- Orbite periodiche: Poiché $\mathrm{div}(F) = -3\mu y^2$, se $\mu \neq 0$ possiamo adattare la dimostrazione del Metodo di Bendixson-Dulac per ottenere che non esistono orbite periodiche.

- Insiemi invarianti: Non esistono rette invarianti o altri insiemi semplici invarianti.

- Simmetrie: Il sistema ammette la simmetria $S(x,y) = (-x,-y)$.

Se infatti $(x(t), y(t))$ è soluzione, allora $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$ soddisfa

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) = -\mu\, y(t) = \mu\, \tilde{y}(t) \\ \dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(t) = -x(t) + x^3(t) + \mu\, y^3(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}^3(t) - \mu\, \tilde{y}^3(t) \end{cases}$$

$\boxed{\mu > 0}$ Rimane da determinare la stabilità dei punti non iperbolici P_2 e P_3.

Sia $V(x,y) = \frac{1}{2}\mu y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$.

(i) Poiché $V(P_2) = V(1,0) = -\frac{1}{4}$, $\nabla V(P_2) = \begin{pmatrix} x^3 - x \\ \mu y \end{pmatrix}\Big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e

$$\mathrm{Hess}(V)(P_2) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ è definita positiva,}$$

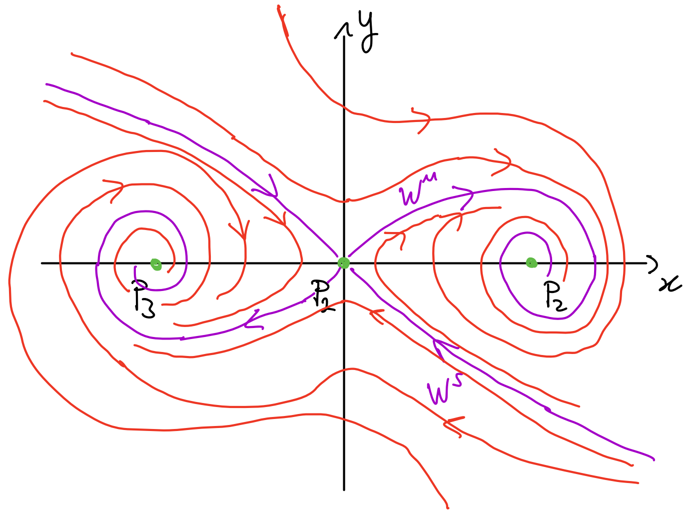
si ha che P_2 è un punto di minimo locale isolato di V.

(ii) $\dot{V}(x,y) = (x^3 - x)\cdot \mu y + \mu y\,(x - x^3 - \mu y^3) = -\mu^2 y^4 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Quindi V è funzione di Lyapunov per P_2, che è quindi stabile.

Inoltre per il principio di La Salle si ha che l'ω-limite dei punti vicini a P_2 è contenuto in $\{y=0\}$ ed è invariante. Ma $\{y=0\}$ non ha insiemi invarianti oltre ai punti fissi, quindi P_2 è asintoticamente stabile.

Lo stesso ragionamento si applica a P_3.



$\boxed{\mu < 0}$ Rimane da determinare la stabilità del punto non iperbolico P_1.

Sia $V(x,y) = \frac{1}{2}\mu y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ come sopra

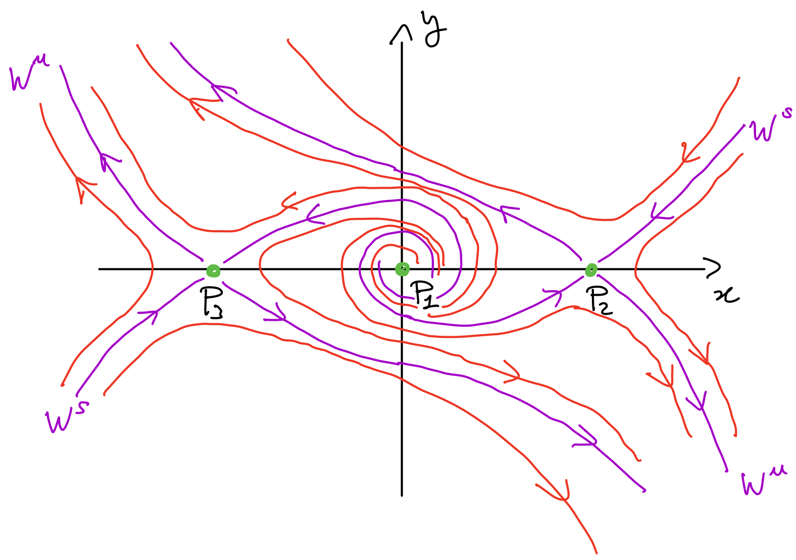
(i) Poiché $V(P) = V(0,0) = 0$, $\nabla V(P) = \begin{pmatrix} x^3 - x \\ \mu y \end{pmatrix}\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e

$$\mathrm{Hess}(V)(P_1) = \begin{pmatrix} 3x^2-1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ è definita negativa,}$$

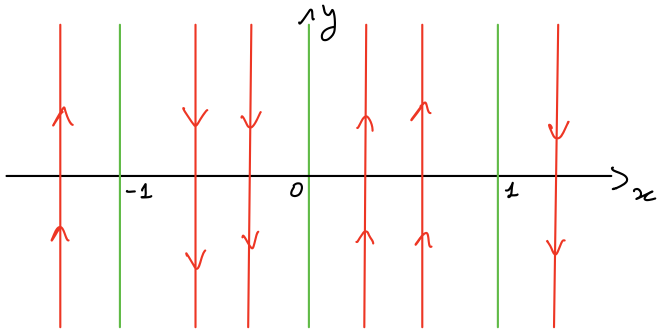
si ha che P_1 è un punto di massimo locale isolato di V.

(ii) $\dot V(x,y) = (x^3 - x)\cdot \mu y + \mu y\,(x - x^3 - \mu y^3) = -\mu^2 y^4 \le 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Possiamo dedurre che P_1 è instabile (si poteva usare $\tilde V(x,y) = -V(x,y)$).

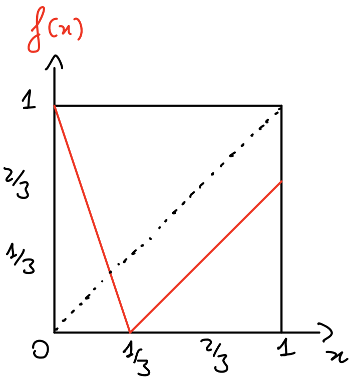


$\boxed{\mu = 0}$ In questo caso ci sono tre rette di punti fissi e tutte le rette $\{x = c\}$ sono invarianti. Quindi otteniamo il seguente ritratto di fase



ESERCIZIO 3

$$f : [0,1] \to [0,1] \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & x \in [0, 1/3] \\ x - \frac{1}{3}, & x \in [1/3, 1] \end{cases}$$



(a) Per determinare f^2 dobbiamo suddividere gli intervalli $[0, 1/3]$ e $[1/3, 1]$ ulteriormente.

Infatti $f([0, 1/3]) = [0,1]$, e $f(0) = 1$, $f(\frac{2}{9}) = \frac{1}{3}$, $f(1/3) = 1$. Quindi

$$x \in [0, 2/9] \Rightarrow f^2(x) = f(1-3x) = (1-3x) - 1/3 = 2/3 - 3x$$

$$x \in [2/9, 1/3] \Rightarrow f^2(x) = f(1-3x) = 1 - 3(1-3x) = 9x - 2$$

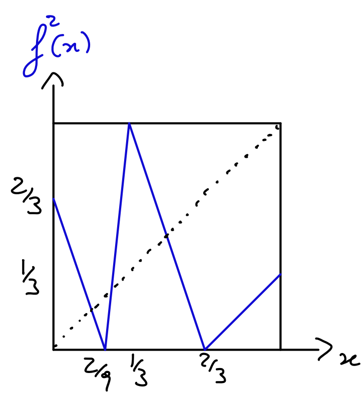
Inoltre $f([1/3, 1]) = [0, 2/3]$, e $f(1/3) = 0$, $f(2/3) = 1/3$, $f(1) = 2/3$. Quindi

$$x \in [1/3, 2/3] \Rightarrow f^2(x) = f(x - 1/3) = 1 - 3(x - 1/3) = 2 - 3x$$

$$x \in [2/3, 1] \Rightarrow f^2(x) = f(x - 1/3) = (x - 1/3) - 1/3 = x - 2/3$$

In conclusione

$$f^2(x) = \begin{cases} 2/3 - 3x, & x \in [0, 2/9] \\ 9x - 2, & x \in [2/9, 1/3] \\ 2 - 3x, & x \in [1/3, 2/3] \\ x - 2/3, & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$



(b) Il grafico di f^2 implica che esistono due punti fissi di f^2 che non sono punti fissi di f. I due punti sono $x_1 = 1/6$ e $x_2 = 1/2$, e si ottengono come soluzione di $f^2(x) = x$ con $x \neq \frac{1}{4}$, il punto fisso di f.
Si ha $(f^2)'(x_1) = (f^2)'(x_2) = -3$, quindi l'orbita è instabile.

(c) Consideriamo la partizione di $[0,1]$ in $J_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $J_3 = [\frac{2}{3}, 1]$.
L'f-grafo associato a questa partizione è

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, bend right] \\
1 \arrow[loop left] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 3 \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

quindi $J_1 J_3 J_2 J_1$ è un cammino ammissibile di lunghezza 4 e implica l'esistenza di $\bar{x}$ t.c. $f^3(\bar{x}) = \bar{x}$. Il punto $\bar{x}$ non può essere fisso perché $J_1 \cap J_2 \cap J_3 = \emptyset$. Quindi $\bar{x}$ è periodico di periodo minimo 3.
Si può ottenere che $\bar{x} = 1/8$.
Applicando il Teorema di Sharkovski deduciamo che per f esiste un'orbita periodica di periodo minimo n, $\forall n \in \mathbb{N}$.