Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 24-02-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + y^2$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\; x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove

$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,, x \geq 0\,, y \leq x^2\big\}\ .$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 = y^3 - 2y^2 - y + 2\,,\ y < 2\big\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1\,,\,0\,,\,1)$;

iii) calcolare il volume del solido

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq y^3 - 2y^2 - y + 2\,,\ y < 2\big\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + y^2$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque differenziabile infinite volte. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 4x^3 - 24x^2 + 32x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Possiamo riscrivere la prima equazione come

$$4x\,(x^2 - 6x + 8) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \{0, 2, 4\}$$

Dunque i punti critici sono

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarli andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 48x + 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e sostituiamo i punti. Troviamo

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dunque $\det Hf(0,0) = 64 > 0$ e traccia $Hf(0,0) = 34 > 0$. Concludiamo che C_1 è un punto di minimo locale;

$$Hf(2,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dunque $\det Hf(0,0) = 64 < 0$. Concludiamo che C_2 è un punto di sella;

$$Hf(4,0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dunque $\det Hf(0,0) = 64 > 0$ e traccia $Hf(0,0) = 34 > 0$. Concludiamo che C_3 è un punto di minimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

L'insieme Ω è il disco unitario con centro nell'origine degli assi. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non differenziabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità, mentre i punti critici liberi sono stati trovati al punto precedente. Solo uno, C_1, è interno ad Ω e quindi da considerare.

Passiamo al comportamento di f sul bordo di Ω. Non ci sono spigoli e il bordo è composto da un unico pezzo

$$\Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange scrivendo Γ come insieme di livello della funzione $G(x, y) = x^2 + y^2$. Notiamo che tutti i punti di Γ sono regolari, quindi dobbiamo cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 24x^2 + 32x = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} 4x^3 - 24x^2 + 32x = 2\lambda x \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} 4x^3 - 24x^2 + 32x = 2\lambda x \\ y \neq 0 \\ \lambda = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema ricaviamo $x = \pm 1$ e otteniamo i punti critici vincolati

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo sotto-sistema sostituiamo il valore di λ nella prima equazione, per cui otteniamo

$$\begin{cases} 4x^3 - 24x^2 + 30x = 0 \\ y \neq 0 \\ \lambda = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e si ottiene facilmente che la prima equazione è equivalente a

$$2x(2x^3 - 12x + 15) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \left\{0, \frac{6 \pm \sqrt{6}}{2}\right\}$$

La condizione $x^2 + y^2 = 1$ implica che l'unico valore accettabile sia $x = 0$, dunque otteniamo i punti critici vincolati

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_1) = 0\,, \quad f(Q_1) = 9\,, \quad f(Q_2) = 25\,, \quad f(Q_3) = f(Q_4) = 1\,.$$

Per cui su Ω, il minimo di f è 0, e il massimo è 25.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2+y^2 \le 4\,, x \ge 0\,, y \le x^2\right\}\,.$$

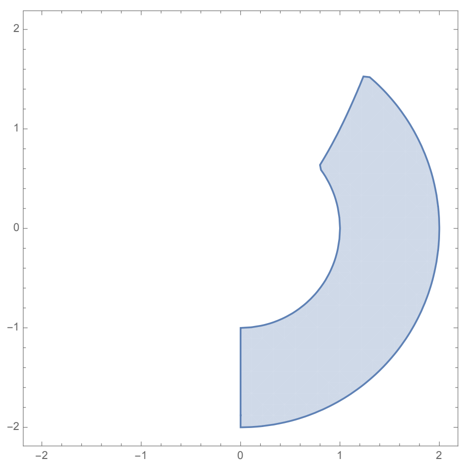

Figure 1: L'insieme Ω.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Risolviamo l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_S 1\,d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, 1 \le \rho^2 \le 4\,,\, \rho\cos\theta \ge 0\,,\, \rho\sin\theta \le \rho^2\cos^2\theta\right\}$$

Dalle tre condizioni ricaviamo innanzitutto che

$$1 \le \rho \le 2 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

e in quest'insieme va studiata la terza condizione che si riscrive come

$$\rho \ge \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

L'insieme S è rappresentato in figura 2. Dunque si scrive come insieme semplice rispetto a ρ come

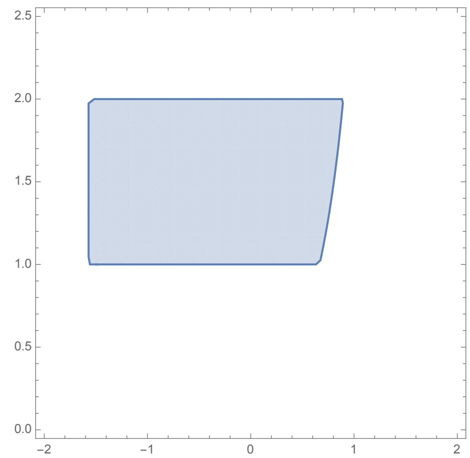

Figure 2: L'insieme S con θ sulle ascisse e ρ sulle ordinate.

unione di due insiemi, $S = S_1 \cup S_2$ con

$$S_1 = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \theta_1 \,,\, 1 \le \rho \le 2 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \,,\, \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \le \rho \le 2 \right\}$$

dove θ_1 e θ_2 sono i valori in $[0, \frac{\pi}{2}]$ che risolvono

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2} = 2\,.$$

Quindi otteniamo

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S 1\; d\rho\, d\theta = \iint_{S_1} 1\; d\rho\, d\theta + \iint_{S_2} 1\; d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1} \left(\int_1^2 1\; d\rho \right) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^2 1\; d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_1} 1\, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(2 - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \right) d\theta =$$

$$= \theta_1 + \frac{\pi}{2} + \left(2\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = 2\theta_1 - \theta_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\cos\theta_2} + \frac{1}{\cos\theta_1}\,.$$

Infine dalle condizioni su θ_1 e θ_2 possiamo ricavare

$$\theta_1 = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_2 = \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta_2 = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e sostituire nel risultato.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+z^2 = y^3 - 2y^2 - y + 2\,,\, y < 2\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

Si tratta di una superficie di rotazione che si ottiene ruotando intorno all'asse y il grafico della funzione $g(y) = \sqrt{y^3 - 2y^2 - y + 2}$. Osserviamo che le radici del polinomio che compare in $g(y)$ sono $y = \pm 1, 2$, e lo studio del segno del polinomio ci suggerisce che i punti di Σ soddisfano $y \in [-1,1]$. Il grafico di g in $[-1,1]$ è rappresentato nella figura 3.

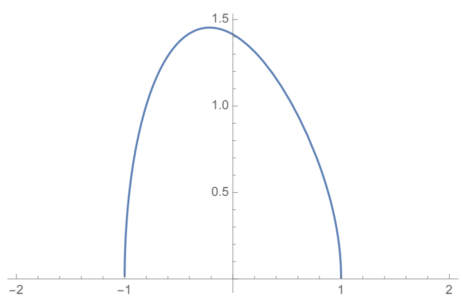

Figure 3: Il grafico di g.

Se adesso lo disegniamo sul piano (y,z) come grafico di $z = g(y)$ e lo facciamo ruotare intorno all'asse y, otteniamo il disegno di Σ in figura 4.

Una parametrizzazione globale di Σ si ottiene allora dalla forma standard per le superfici di rotazione, ossia

$$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(t,\theta) = (g(t)\,\cos\theta\,,\, t\,,\, g(t)\,\sin\theta)$$

con $g(t) = \sqrt{t^3 - 2t^2 - t + 2}$ e

$$D = \{(t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] \,:\, t \in [-1,1]\}\,.$$

ii) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1\,,\,0\,,\,1)$;

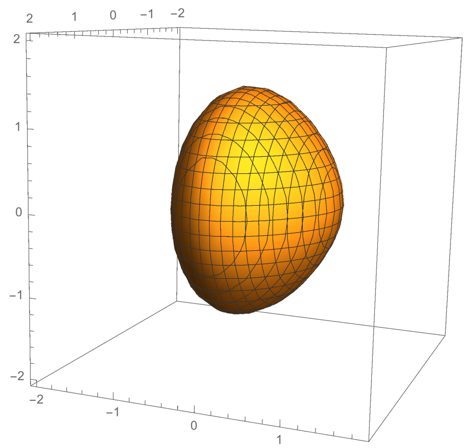

Figure 4: La superficie Σ.

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + z^2 - y^3 + 2y^2 + y$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -3y^2 + 4y + 1 \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$2\,(x-1) + (y-0) + 2\,(z-1) = 0\,.$$

iii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq y^3 - 2y^2 - y + 2\,,\, y < 2 \right\}$$

Si tratta del solido di rotazione della forma

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leq y \leq b\,,\, x^2 + z^2 \leq g^2(y) \right\}$$

dove $a = -1$, $b = 1$ e $g(y) = \sqrt{y^3 - 2y^2 - y + 2}$, che rappresenta la zona dello spazio delimitata dalla superficie Σ. Possiamo applicare la formula per il calcolo dei volumi dei solidi di rotazione, e ottenere

$$\text{Volume}(V) = \int_a^b \pi g^2(y)\,dy = \int_{-1}^{1} \pi \left(y^3 - 2y^2 - y + 2\right)\,dy = \frac{8}{3}\pi\,.$$