Esercizi

Variabili aleatorie

1. Si lanci 5 volte una moneta le cui facce hanno probabilità data da $p(T) = \frac{1}{3}$ e $p(C) = \frac{2}{3}$, disegnare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X definita in questo modo: partendo da 0 sulla retta reale, mi muovo di +1 se in un lancio esce testa, sto fermo se in un lancio esce croce. Determinare poi: (i) lo 0.96-quantile di X; (ii) $P(X \geq 2.5)$.
Risposta: X è una variabile binomiale di parametri $(5, \frac{1}{3})$; (i) 4; (ii) $\frac{17}{81}$.

2. Si lanci 5 volte una moneta le cui facce hanno probabilità data da $p(T) = \frac{1}{3}$ e $p(C) = \frac{2}{3}$, disegnare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X definita in questo modo: partendo da 0 sulla retta reale, mi muovo di +2 se in un lancio esce testa, mi muovo di +1 se in un lancio esce croce. (i) Determinare poi la mediana di X.
Risposta: confrontare con l'esercizio precedente; (i) 7.

3. Si lanci 3 volte una moneta le cui facce hanno uguale probabilità, determinare la legge di probabilità della variabile aleatoria X definita in questo modo: partendo da 0 sulla retta reale, mi muovo di +2 se in un lancio esce testa, mi muovo di -1 se in un lancio esce croce.
Risposta: X assume valori tra -3 e 6, e si ha $p(-3) = \frac{1}{8}$, $p(-2) = p(-1) = 0$, $p(0) = \frac{3}{8}$, $p(1) = p(2) = 0$, $p(3) = \frac{3}{8}$, $p(4) = p(5) = 0$, $p(6) = \frac{1}{8}$.

4. Supponiamo di avere due scatole, la prima con 3 palline rosse e 5 palline blu, la seconda con 4 palline rosse e 4 palline blu. Si sceglie a caso una scatola in maniera equiprobabile, e si ripeta tre volte l'estrazione di una pallina (dopo ogni estrazione la pallina viene reinserita nella scatola). Definiamo la variabile aleatoria X in questo modo: partendo da 0 sulla retta reale, mi muovo di +1 se in un'estrazione esce una pallina rossa, sto fermo se in un'estrazione esce una pallina blu. Sapendo che alla fine dell'esperimento la variabile aleatoria X vale 2, qual è la probabilità che la scatola estratta fosse la prima?
Risposta: $\frac{45}{109}$.

5. Determinare lo 0.9-quantile di una variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{1}{2}$.
Risposta: 4.

6. Data una variabile aleatoria X di Poisson di parametro 3, determinare il primo quartile.
Risposta: 2.

7. Sia X variabile aleatoria con densità $f(x)$ data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\,, & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2}{9}\,, & 3 < x \leq 6 \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare: (i) la probabilità $P(X \in A)$ con $A = [1, 5]$; (ii) la probabilità $P(X \in A|X \in B)$ con $A = [1, 5]$ e $B = [-1, 4]$; (iii) primo quartile, mediana e terzo quartile di X.
Risposte: (i) $\frac{2}{3}$; (ii) $\frac{4}{5}$; (iii) primo quartile $= \frac{9}{4}$, mediana $= \frac{15}{4}$, terzo quartile $= \frac{39}{8}$.

8. Sia X variabile aleatoria con densità $f(x)$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq -3 \\ 2\lambda\,, & -3 < x \leq -1 \\ 0\,, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}\,\lambda\, e^{-\lambda x}\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare: (i) λ in modo che sia ben definita come variabile aleatoria; (ii) la probabilità $P(X \in A)$ con $A = [-2, 2]$; (iii) primo quartile, mediana e terzo quartile di X.
Risposte: (i) $\frac{1}{8}$*; (ii)* $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}$*; (iii) primo quartile* $= -2$*, mediana* $= -\frac{1}{2}$*, terzo quartile* $= 8\log 2$.

9. Sia X variabile aleatoria gaussiana $N(m, \sigma^2)$ con $m = 1$ e $\sigma = 2$. Determinare: (i) la probabilità di $A = [0, 2]$; (ii) primo quartile, mediana e terzo quartile di X.
Risposte: (i) 0.38292*; (ii) primo quartile* $= -0.35$*, mediana* $= 1$*, terzo quartile* $= 2.35$.

10. Sia X variabile aleatoria binomiale $B(2, p)$, e sia $Y = 2 - X$. Determinare la funzione di massa $p(x_i, y_j)$.
Risposta: $p(0, 2) = (1-p)^2$*;* $p(1, 1) = 2p(1-p)$*;* $p(2, 0) = p^2$*;* $p(x_i, y_j) = 0$ *in tutti gli altri casi.*

11. Siano X_1, X_2 e X_3 variabili aleatorie indipendenti equidistribuite con densità esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Siano $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = Y_1 + X_3$. Determinare: (i) la densità di Y_1; (ii) la probabilità $P(Y_2 \in [0, 1])$.
Risposte: (i) $f_{Y_1}(y) = 4y\,e^{-2y}$ *per* $y \geq 0$*, e* $f_{Y_1}(y) = 0$ *per* $y < 0$*; (ii)* $1 - 5e^{-2}$.

12. Sia X variabile aleatoria con distribuzione uniforme su $[-1, 2]$, e siano $Y_1 = X^2$ e $Y_2 = (X+1)^2$. Disegnare la funzione di ripartizione di Y_1 e Y_2, e determinarne primo quartile, mediana e terzo quartile.
Risposte: (i) per Y_1 *si ha primo quartile* $= \frac{9}{64}$*, mediana* $= \frac{9}{16}$*, terzo quartile* $= \frac{25}{16}$*; (ii) per* Y_2 *si ha primo quartile* $= \frac{9}{16}$*, mediana* $= \frac{9}{4}$*, terzo quartile* $= \frac{81}{16}$.

13. Sia X variabile aleatoria discreta a valori $\{1, 2, 3\}$ con $p_X(k) = \frac{1}{3}$ per ogni k. Sia Y variabile aleatoria discreta a valori $\{1, 2, 3\}$ con $p_Y(k) = \frac{k}{6}$ per ogni k. Sapendo che X e Y sono indipendenti, determinare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Z = X \cdot Y$ e calcolarne la mediana.
Risposta: mediana di $Z = 4$.

14. Sia X variabile aleatoria discreta a valori $\{-1, +1\}$ con $p_X(1) = p \in (0, 1)$. Sia Y variabile aleatoria gaussiana $N(m, \sigma^2)$ con $m = 1$ e $\sigma = 1$. Sapendo che X e Y sono indipendenti, determinare p tale $P(X + Y > 0) = \frac{3}{4}$.
Risposta: $p \sim 0.523834$.

15. Sia X variabile aleatoria gaussiana $N(m, \sigma^2)$, dire se $Y = aX + b$, con $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}$, è gaussiana ed eventualmente con quali parametri.
Risposta: $Y = N(am + b, a^2\sigma^2)$.