Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 20-01-2016

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = e^{x^4+x^2y+y^2}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^4+2y^2}}$$

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2-1 \le y \le 3\right\}$$

Esercizio 2. (9 punti) Data la curva (γ, I), con $I = \left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\log(1+\cos^2 t)\,,\,t^2\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(\log\frac{3}{2}\,,\,\frac{\pi^2}{16}\Big)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (11 punti) Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\ , \qquad \sigma(u,v) = \big(v^2\,,\,u+v\,,\,u^2+2uv\big)$$

definita sull'insieme

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ v \ge 0\,,\, u \ge 0\,,\, u+v \le 3\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1,\ 2,\ 3)$;

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma y\,dS$.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{x^4+x^2y+y^2}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è composizione della funzione esponenziale e di un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è almeno di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} (4x^3 + 2xy)\, e^{x^4+x^2y+y^2} = 0 \\ (x^2 + 2y)\, e^{x^4+x^2y+y^2} = 0 \end{cases}$$

La funzione esponenziale non si annulla mai, dunque dalla seconda equazione si ricava $2y = -x^2$, e sostituendo nella prima otteniamo $x^3 = 0$. Dunque f ha un solo punto critico, dato da

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarlo andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Poiché f è di classe C^2 su tutto il dominio, la matrice Hessiana è simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} [12x^2 + 2y + (4x^3 + 2xy)^2]\, e^{x^4+x^2y+y^2} & [2x + (4x^3 + 2xy)(x^2 + 2y)]\, e^{x^4+x^2y+y^2} \\ [2x + (4x^3 + 2xy)(x^2 + 2y)]\, e^{x^4+x^2y+y^2} & [2 + (x^2 + 2y)^2]\, e^{x^4+x^2y+y^2} \end{pmatrix},$$

e

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det Hf(0,0) = 0$. Dunque C non si può caratterizzare studiando solo la matrice Hessiana, che risulta essere semi-definita positiva. L'unica conclusione che possiamo trarre è che C non è sicuramente un punto di massimo locale.
(*Approfondimento:* Si può comunque dimostrare che C è un punto di minimo assoluto, quindi locale. Infatti per ogni (x,y) risulta verificata la disuguaglianza

$$x^4 + x^2y + y^2 \geq \frac{3}{4}x^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\frac{1}{2}x^2 + y)^2 \geq 0$$

e quindi $f(x,y) \geq e^{\frac{3}{4}x^4} \geq f(0,0) = 1$.)

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 1}{\sqrt{x^4 + 2y^2}}$$

La funzione di cui dobbiamo studiare il limite è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^4 + 2y^2 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il limite è della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, dunque iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^4+2y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4+\lambda x^3+\lambda^2 x^2}-1}{|x|\sqrt{x^2+2\lambda^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x^2 + o(x^2)}{|x|\sqrt{x^2+2\lambda^2}} = 0 \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

e

$$\lim_{y=0,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^4+2y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+o(x^4)}{x^2} = 0\,.$$

Dunque se il limite esiste, è uguale a 0. Per le proprietà dell'esponenziale possiamo dimostrare che è 0 il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^2y+y^2}{\sqrt{x^4+2y^2}}\,,$$

e per farlo cerchiamo una buona maggiorazione. Si trova

$$0 \le \left|\frac{x^4+x^2y+y^2}{\sqrt{x^4+2y^2}}\right| \le \frac{x^4+y^2}{\sqrt{x^4+2y^2}} + \frac{|x^2y|}{\sqrt{x^4+2y^2}} \le \sqrt{x^4+2y^2} + \frac{1}{2}\,\frac{x^4+y^2}{\sqrt{x^4+2y^2}} \le \frac{3}{2}\sqrt{x^4+2y^2}\,,$$

e chiaramente $\sqrt{x^4+2y^2} \to 0$ se $(x,y)\to 0$. Quindi il limite richiesto esiste ed è uguale a 0.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2-1 \le y \le 3\right\}$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non differenziabilità della funzione.

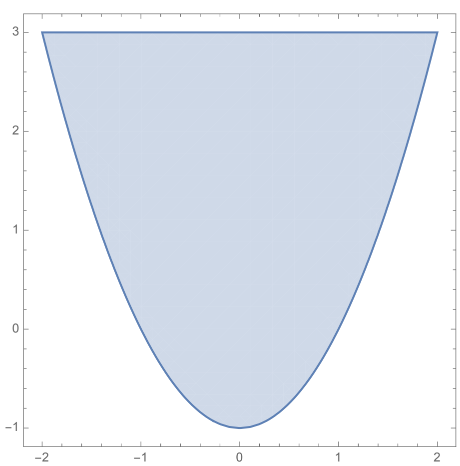

Figure 1: L'insieme Ω.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità, e i punti critici sono stati trovati al punto i). L'unico punto critico è $C = (0,0)$ che è interno ad Ω, e va quindi preso in considerazione.

Passiamo al comportamento di f sul bordo di Ω. Gli spigoli sono i punti

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il bordo è composto da due parti

$$\Gamma_1 = \{y = 3\,,\ -2 \le x \le 2\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{y = x^2 - 1\,,\ -2 \le x \le 2\right\}$$

Studiamo prima f ristretta a Γ_1. Parametrizziamo il segmento tramite

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-2\,,\,2]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = e^{t^4+3t^2+9}\,, \qquad t \in [-2\,,\,2]$$

Si trova $g_1'(t) = (4t^3 + 6t)\,e^{t^4+3t^2+9}$, che si annulla solo per $t = 0 \in [-2\,,\,2]$, quindi otteniamo il punto critico vincolato

$$Q_3 = \gamma_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Studiamo ora f ristretta a Γ_2.Parametrizziamo Γ_2 tramite

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-2\,,\,2]$$

otteniamo, componendo con f, la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{3t^4-3t^2+1}\,, \qquad t \in [-2\,,\,2]$$

Si trova $g_2'(t) = (12t^3 - 6t)\,e^{3t^4-3t^2+1}$, che si annulla per $t = 0$ e $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, tutti interni a $[-2\,,\,2]$. Quindi otteniamo i punti critici vincolati

$$Q_4 = \gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_5 = \gamma_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q_6 = \gamma_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 1\,, \quad f(Q_1) = f(Q_2) = e^{37}\,, \quad f(Q_3) = e^9$$

$$f(Q_4) = e\,, \quad f(Q_5) = f(Q_6) = e^{\frac{1}{4}}\,.$$

Per cui su Ω, il minimo di f è 1, e il massimo è e^{37}.

Esercizio 2. *Data la curva* (γ, I)*, con* $I = \left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\log(1+\cos^2 t)\,,\, t^2\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \Big(\log\frac{3}{2}\,,\,\frac{\pi^2}{16}\Big)$*;*

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \Big(\log\frac{3}{2}\,,\,\frac{\pi^2}{16}\Big)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \log(1+\cos^2 t_0) = \log\frac{3}{2} \\ t_0^2 = \frac{\pi^2}{16} \end{cases}$$

Si ricava immediatamente che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{\pi}{4}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sin(t_0)\cos(t_0)}{1+\cos^2(t_0)} \\ 2t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\frac{\pi}{2}\left(x - \log\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(y - \frac{\pi^2}{16}\right) = 0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) *del campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$, che è ben noto. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

Prima di chiederci se il campo è conservativo (dovremmo ricordarci che non lo è!) studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva non è chiusa, quindi non possiamo applicare il Teorema del Rotore, ma possiamo vedere se il lavoro si può calcolare restringendo il dominio del campo ad un insieme V, che sia semplicemente connesso e che contenga il sostegno della curva. Se così

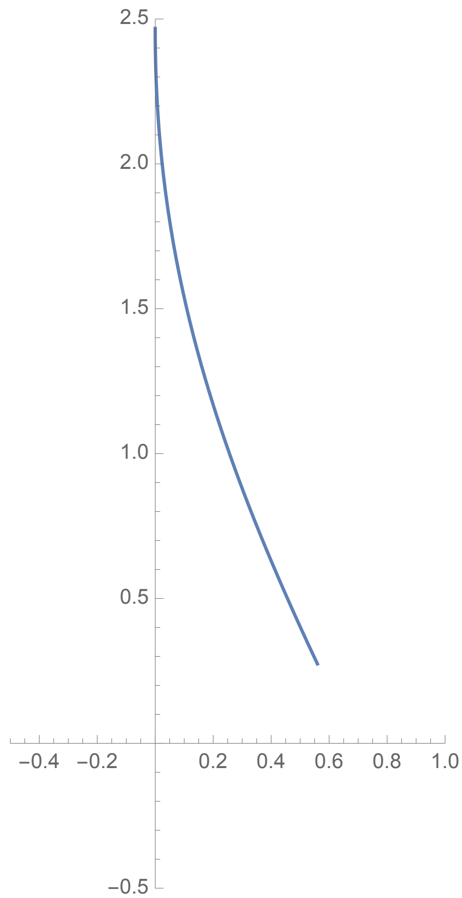

Figure 2: Il sostegno di (γ, I).

fosse, potremmo considerare $\mathbf{F}|_V$ e trattarlo come campo conservativo. Disegniamo innanzitutto il sostegno di (γ, I) (vedi figura 2).

Possiamo quindi scegliere $V = \{y > 0\}$ e usare un potenziale di $\mathbf{F}$ su V. Un possibile potenziale su V è la funzione

$$f(x, y) = -\arctan\frac{x}{y}\,,$$

quindi

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = f\Big(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big) - f\Big(\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right)\Big) = f\left(0, \frac{\pi^2}{4}\right) - f\left(\log\frac{7}{4}, \frac{\pi^2}{36}\right) = \arctan\left(\frac{36\,\log\frac{7}{4}}{\pi^2}\right)\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ immagine della parametrizzazione*

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(u, v) = \big(v^2\,,\, u + v\,,\, u^2 + 2uv\big)$$

definita sull'insieme

$$D = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; v \geq 0\,,\, u \geq 0\,,\, u + v \leq 3\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1,\ 2,\ 3)$;

Dobbiamo trovare il vettore normale a Σ nel punto P, che si ottiene come $P = \sigma(1,\ 1)$. Scriviamo quindi innanzitutto la matrice Jacobiana di σ da cui otteniamo il vettore normale come prodotto vettoriale tra le due colonne. Troviamo

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ 1 & 1 \\ 2(u+v) & 2u \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -2v \\ 4v(u+v) \\ -2v \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi $\vec{n}\,(1,\ 1)$, che è

$$\vec{n}\,(1,\ 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è

$$-2(x-1) + 8(y-2) - 2(z-3) = 0\,.$$

ii) calcolare l'integrale di superficie $\iint_\Sigma y\, dS$.

Applicando la formula per l'integrale di superficie, dobbiamo calcolare l'integrale

$$\iint_\Sigma y\, dS = \iint_D y(u,v)\|\vec{n}(u,v)\|\, dudv$$

Dal punto i) troviamo che

$$\|\vec{n}(u,v)\| = \sqrt{4v^2 + 16v^2(u+v)^2 + 4v^2} = 2\sqrt{2}\, v\sqrt{1+2(u+v)^2}$$

dove abbiamo usato che $v \geq 0$ su D.

L'insieme D è raffigurato nella figura 3, e si può scrivere come insieme semplice rispetto alla u nella forma

$$D = \{(u,v)\ :\ 0 \leq v \leq 3\,,\ 0 \leq u \leq 3-v\}$$

Applichiamo quindi le formule di riduzione per insiemi semplici e otteniamo

$$\iint_\Sigma y\, dS = \iint_D y(u,v)\|\vec{n}(u,v)\|\, dudv = \iint_D 2\sqrt{2}\, v(u+v)\sqrt{1+2(u+v)^2}\, dudv =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^3 \left(\int_0^{3-v} v(u+v)\sqrt{1+2(u+v)^2}\, du\right) dv = 2\sqrt{2}\int_0^3 \left(\frac{v}{6}[1+2(u+v)^2]^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{3-v} dv =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^3 \left(19^{\frac{3}{2}}\, v - v[1+2v^2]^{\frac{3}{2}}\right) dv = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{19^{\frac{3}{2}}}{2}\, v^2 - \frac{1}{10}[1+2v^2]^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{30}\left(494\sqrt{19} + 1\right)\,.$$

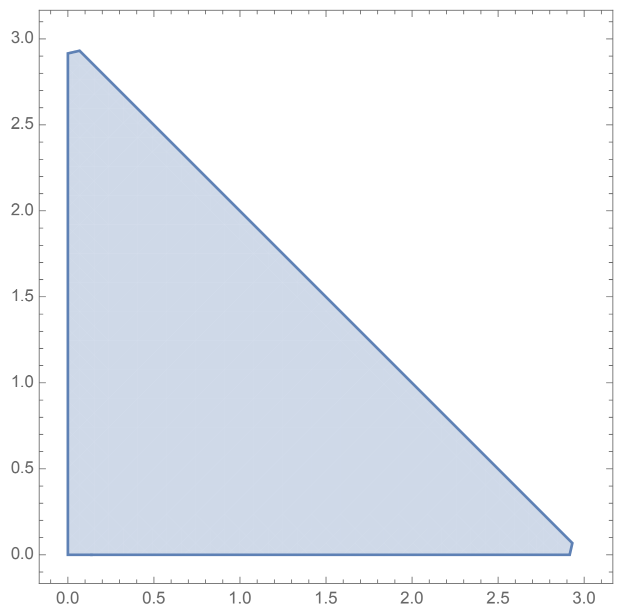

Figure 3: L'insieme D