Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 19-11-2022

Esercizio 1. (12 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + \mu y - 2xy^2 + y^3 \\ \dot{y} = -x - 2y - x^2 y \end{cases}$$

determinare la tipologia di punto fisso che si ha in $(0,0)$ al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (18 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{4}\mu(x^2 - 1) \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1) + \frac{1}{2}\mu xy \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.
(*Suggerimento:* considerare prima il caso $\mu = 0$, ed utilizzare le informazioni ottenute per studiare il caso $\mu > 0$.)

ES. 1

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + \mu y - 2xy^2 + y^3 \\ \dot{y} = -x - 2y - x^2 y \end{cases}$$

Calcoliamo $JF(0,0)$. Si ha $JF(x,y) = \begin{pmatrix} \mu - 2y^2 & \mu - 4xy + 3y^2 \\ -1 - 2xy & -2 - x^2 \end{pmatrix}$

e quindi

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & \mu \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vale $\det JF(0,0) = -\mu$ e $\mathrm{tr}\, JF(0,0) = \mu - 2$. Quindi

- $\mu > 0$. Poiché $\det JF(0,0) < 0$, $P = (0,0)$ è un punto fisso iperbolico di tipo sella, in particolare instabile;
- $\mu < 0$. Si ha $\det JF(0,0) > 0$, $\mathrm{tr}\, JF(0,0) < 0$ e $(\mathrm{tr}\, JF(0,0))^2 - 4 \det JF(0,0) = (\mu - 2)^2 + 4\mu = \mu^2 + 4 > 0$, $\forall \mu$. Quindi $P = (0,0)$ è un punto fisso iperbolico di tipo nodo stabile, in particolare asintoticamente stabile.
- $\mu = 0$. Si ha $\det JF(0,0) = 0$, e quindi $P = (0,0)$ è punto fisso non iperbolico.

  Per studiarne la stabilità, cerchiamo una funzione di Lyapunov. Poniamo $V(x,y) = A x^{2n} + B y^{2m}$ con $A, B \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\dot{V}(x,y) = 2nA x^{2n-1}(-2xy^2 + y^3) + 2mB y^{2m-1}(-x - 2y - x^2 y) =$$

$$= -4nA x^{2n} y^2 + 2nA x^{2n-1} y^3 - 2mB x y^{2m-1} - 4mB y^{2m} +$$

$$- 2mB x^2 y^{2m}$$

Cerchiamo innanzitutto di eliminare i termini con potenze di ordine dispari. Quindi richiediamo che

$$2nA\, x^{2n-1} y^3 = 2mB\, x y^{2m-1} \iff \begin{cases} nA = mB \\ 2n-1 = 1 \\ 3 = 2m-1 \end{cases} \iff \begin{cases} n = 1 \\ m = 2 \\ A = 2B \end{cases}$$

Scegliamo quindi $\boxed{V(x,y) = 2x^2 + y^4}$ per la quale vale

$$\dot V(x,y) = -8x^2y^2 - 8y^4 - 4x^2y^4 = -4y^2\left(2x^2 + 2y^2 + x^2y^2\right)$$

Poiché
$$\left\| \begin{array}{l} \text{(i)}\ V(x,y) > 0 = V(0,0), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \text{(ii)}\ \dot V(x,y) \leq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

si ha che $V(x,y)$ è una funzione di Lyapunov per $P=(0,0)$ su $\mathbb{R}^2$, e quindi $P=(0,0)$ è punto fisso stabile secondo Lyapunov.

Osserviamo inoltre che $\dot V = 0 \iff y = 0$, e l'insieme $\{y=0\}$ contiene come unico insieme invariante $\{(0,0)\}$ (infatti $F(x,0) = (0, -x)$, quindi il campo di vettori è ortogonale all'asse x per $x \neq 0$). Di conseguenza, per il principio di La Salle, $P=(0,0)$ è punto fisso asintoticamente stabile.

ES. 2

$$\begin{cases} \dot x = y + \frac{1}{4}\mu(x^2-1) \\ \dot y = 4x(x^2-1) + \frac{1}{2}\mu xy \end{cases}, \qquad \mu \in [0, +\infty)$$

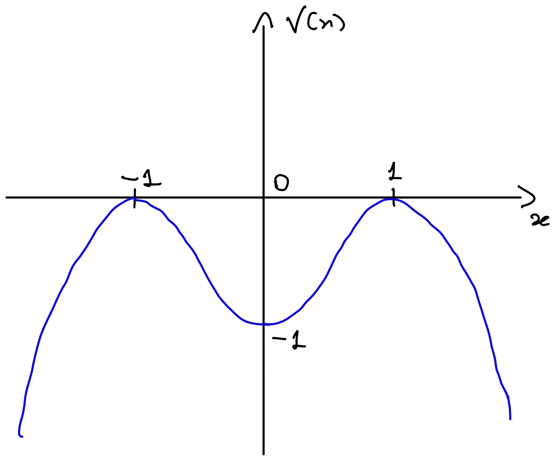
$\boxed{\mu = 0}$ In questo caso il sistema si scrive come

$$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = 4x(x^2-1) = -V'(x)\end{cases}$$

con $V(x) = -(x^2-1)^2$, quindi il sistema è Hamiltoniano di tipo meccanico con

$$\boxed{H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 - (x^2-1)^2}$$

Disegniamo il grafico di $V(x)$



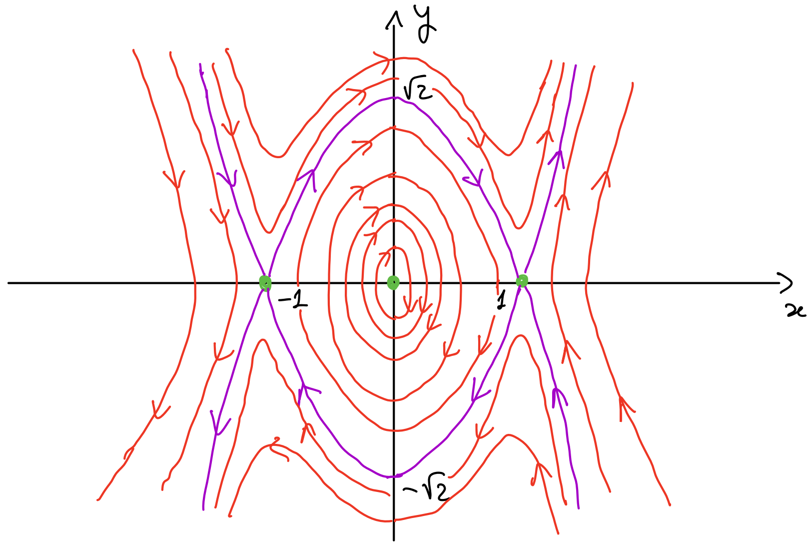
da cui ricaviamo che il sistema ha tre punti fissi

$$\boxed{P_1 = (0,0), \quad P_2 = (-1,0), \quad P_3 = (1,0)}$$

e: P_1 è di tipo centro, P_2 e P_3 sono di tipo sella.

Infine per disegnare il ritratto di fase, ricordando che gli insiemi di livello di $H(x,y)$ sono insiemi invarianti, osserviamo che $H(-1,0) = H(1,0)$, quindi ci saranno orbite eterocline tra P_2 e P_3.

Otteniamo quindi il seguente ritratto di fase



$\boxed{\mu > 0}$ Studiamo innanzitutto come si comporta $\dot{H}(x,y)$, con H la funzione hamiltoniana del caso $\mu = 0$. Si ha

$$\dot{H}(x,y) = -4x(x^2-1)\left[y + \tfrac{1}{4}\mu(x^2-1)\right] + y\left[4x(x^2-1) + \tfrac{1}{2}\mu xy\right] =$$

$$= -\mu x (x^2-1)^2 + \tfrac{1}{2}\mu x y^2 = \mu x \left[\tfrac{1}{2}y^2 - (x^2-1)^2\right] =$$

$$= \mu x \, H(x,y)$$

Da cui si ricava che $\dot{H}(x,y)\Big|_{H=0} \equiv 0$, e quindi l'insieme di livello $\{H(x,y)=0\}$, composto dalle due parabole $y = \pm\sqrt{2}\,(x^2-1)$, è invariante $\forall\, \mu > 0$.

Passiamo allo studio dei punti fissi. Poniamo

$$\begin{cases} y + \frac{1}{4}\mu(x^2-1) = 0 \\ 4x(x^2-1) + \frac{1}{2}\mu xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{1}{4}\mu(x^2-1) \\ 4x(x^2-1) + \frac{1}{2}\mu x\left(-\frac{1}{4}\mu(x^2-1)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -\frac{1}{4}\mu(x^2-1) \\ 4x(x^2-1)\left(1 - \frac{1}{32}\mu^2\right) = 0 \end{cases}$$

Se $\mu^2 = 32$, la seconda equazione è identicamente nulla.

Consideriamo quindi innanzitutto

$\boxed{\mu \neq 4\sqrt{2}}$ Troviamo tre punti fissi

$P_1 = \left(0, \frac{1}{4}\mu\right)$,

Studiamo $JF(x,y)$. Si ha

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mu x & 1 \\ 12x^2 - 4 + \frac{1}{2}\mu y & \frac{1}{2}\mu x \end{pmatrix}$$

e quindi:

- $JF(P_1) = JF\left(0, \frac{1}{4}\mu\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{8}\mu^2 - 4 & 0 \end{pmatrix}$ da cui

$$\det JF(P_1) = 4 - \frac{1}{8}\mu^2 \begin{cases} > 0, & \mu \in (0, 4\sqrt{2}) \\ < 0, & \mu > 4\sqrt{2} \end{cases}, \quad \operatorname{tr} JF(P_1) = 0.$$

- $JF(P_2) = JF(-1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mu & 1 \\ 8 & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$ da cui

$$\det JF(P_2) = \frac{1}{4}\mu^2 - 8 \begin{cases} < 0, & \mu \in (0, 4\sqrt{2}) \\ > 0, & \mu > 4\sqrt{2} \end{cases}, \quad \operatorname{tr} JF(P_2) = -\mu < 0$$

- $JF(P_3) = JF(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mu & 1 \\ 8 & \frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$ da cui

$$\det JF(P_3) = \frac{1}{4}\mu^2 - 8 \begin{cases} < 0, & \mu \in (0, 4\sqrt{2}) \\ > 0, & \mu > 4\sqrt{2} \end{cases}, \quad \operatorname{tr} JF(P_3) = \mu > 0.$$

Per disegnare il ritratto di fase consideriamo quindi separatamente i casi: $\mu \in (0, 4\sqrt{2})$, $\mu > 4\sqrt{2}$, $\mu = 4\sqrt{2}$.

$\boxed{\mu \in (0, 4\sqrt{2})}$ In questo caso i punti P_2 e P_3 sono iperbolici e sono entrambi punti di sella.

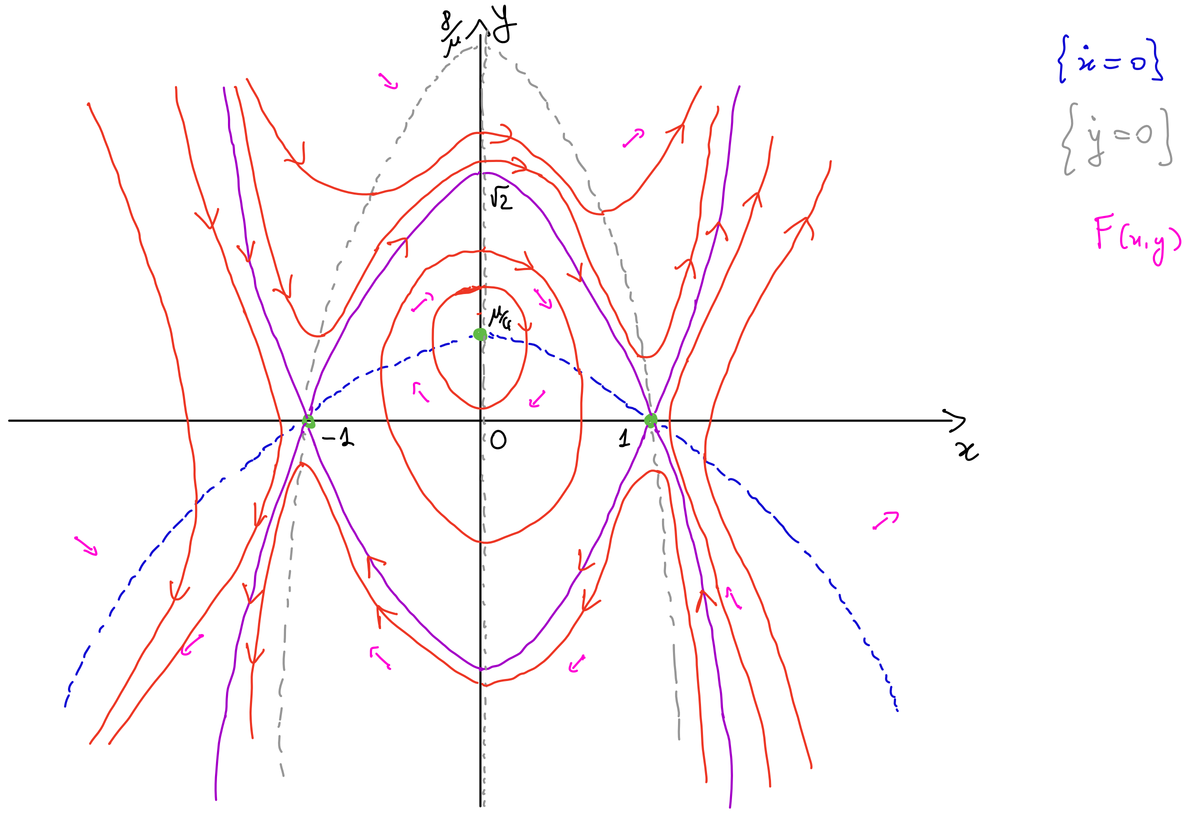
Il punto P_1 è invece non iperbolico, in quanto $JF(P_1)$ ha autovalori con parte reale nulla. Quindi P_1 è un punto di tipo centro lineare.

Possiamo mostrare che continua ad essere un centro anche nel sistema originale, osservando che il sistema ha una simmetria rispetto all'asse y.

Se infatti $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(-t), y(-t))$ si ha

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(-t) = y(-t) + \frac{1}{4}\mu\left((x(-t))^2 - 1\right) = \tilde{y}(t) + \frac{1}{4}\mu\left(\tilde{x}^2(t) - 1\right) \\ \dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(-t) = -4x(-t)\left((x(-t))^2 - 1\right) - \frac{1}{2}\mu\, x(-t)\, y(-t) = \\ \qquad = 4\tilde{x}(t)\left(\tilde{x}^2(t) - 1\right) + \frac{1}{2}\mu\, \tilde{x}(t)\, \tilde{y}(t) \end{cases}$$

Usando infine il segno del campo, otteniamo il seguente ritratto di fase.

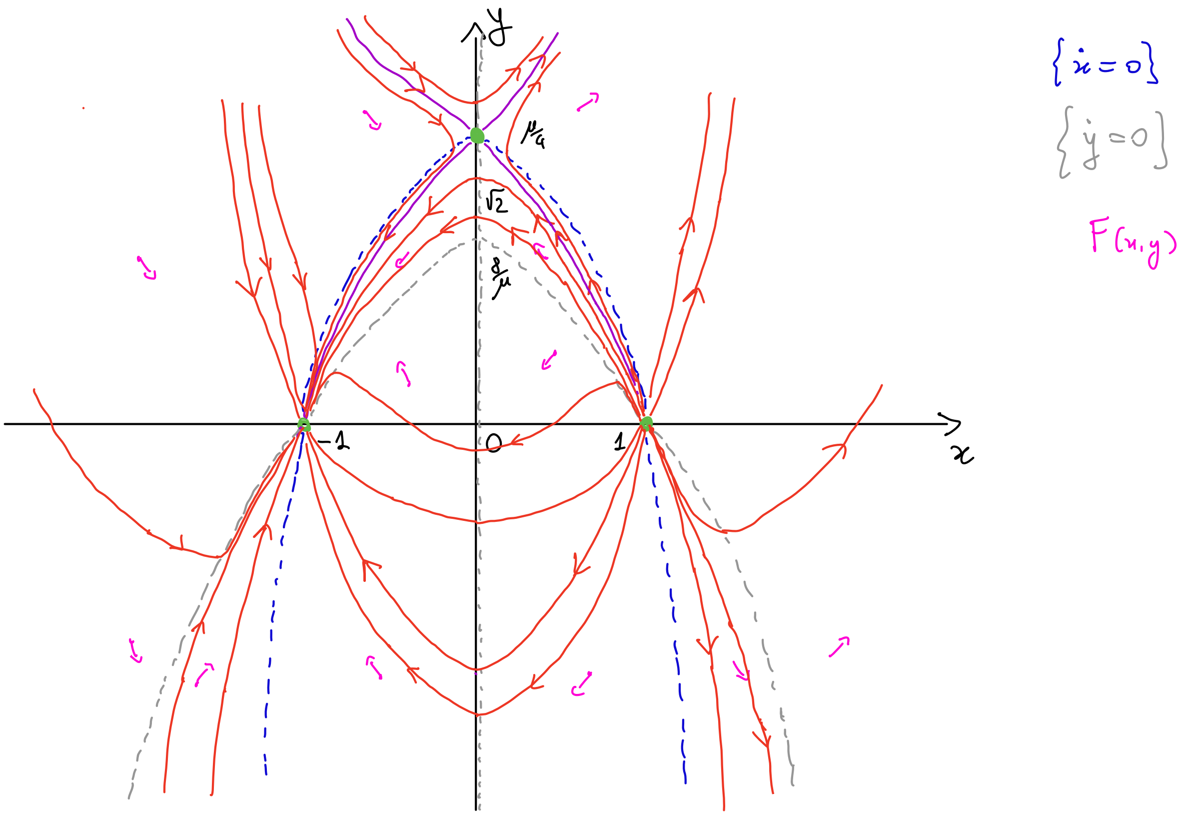


Osserviamo che le curve invarianti $y = \pm\sqrt{2}\,(x^2-1)$ costituiscono le varietà stabili e instabili dei punti di sella P_2 e P_3

$\boxed{\mu > 4\sqrt{2}}$ In questo caso i punti P_2 e P_3 sono iperbolici, e poiché $(\mathrm{tr}\, JF(P_i))^2 - 4 \det JF(P_i) = \mu^2 - 4\left(\frac{1}{4}\mu^2 - 8\right) = 32 > 0$, sono entrambi nodi. P_2 è nodo stabile e P_3 è nodo instabile.

Il punto P_1 è iperbolico ed è punto di sella.

Possiamo disegnare il ritratto di fase.



$\boxed{\mu = 4\sqrt{2}}$ Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sqrt{2}\,(x^2-1) \\ \dot{y} = 4x(x^2-1) + 2\sqrt{2}\,xy = 2\sqrt{2}\,x\left[\sqrt{2}\,(x^2-1) + y\right] \end{cases}$$

I punti fissi sono quindi tutti i punti della parabola $y = -\sqrt{2}(x^2-1)$.

Usando il segno del campo otteniamo