Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 19-07-2023

Esercizio 1. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\mu\, x + 2y \\ \dot{y} = -x + x^3 - \mu\, x^5 \end{cases}$$

(a) per $\mu = 0$, si determini l'esistenza di un integrale primo e si disegni il ritratto di fase;

(b) per $\mu = 1$, si disegni il ritratto di fase.

Esercizio 2. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - (x^2 + y^2)\, x + \frac{\mu}{4}\, \frac{x^2\, y}{x^2+y^2} \\ \dot{y} = x + y - (x^2 + y^2)\, y + \frac{\mu}{4}\, \frac{x\, y^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$

(a) per $\mu = 0$, disegnare il ritratto di fase;

(b) per $\mu = 1$, mostrare l'esistenza di un'orbita periodica.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la trasformazione continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}]; \\ \frac{1}{2} - x, & \text{se} \quad x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]; \\ 3\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{se} \quad x \in J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]; \\ x, & \text{se} \quad x \in J_4 = [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

(a) Si costruisca l'f-grafo associato alla partizione $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$.

(b) Si determini qualitativamente l'ω-limite dei punti $x \in [0, 1]$.

(c) Si discuta il comportamento caotico di f.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\mu x + 2y \\ \dot{y} = -x + x^3 - \mu x^5 \end{cases}$$

(a) $\mu = 0$ In questo caso il sistema diventa

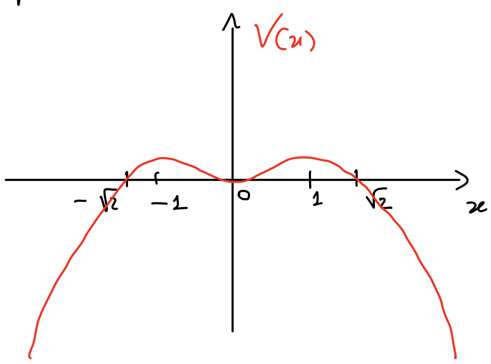
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -x + x^3 \end{cases}$$

che è un sistema hamiltoniano ad un grado di libertà della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'(x) \end{cases} \quad \text{con} \quad H(x,y) = y^2 + V(x) = y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

Di conseguenza $H(x,y)$ è un integrale primo e gli insiemi di livello $\{H(x,y) = c\}$ sono insiemi invarianti $\forall c \in \mathbb{R}$.

Disegniamo il grafico di $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$. Poiché $V'(x) = x - x^3 = x(1-x^2)$ e $V''(x) = 1 - 3x^2$, troviamo tre punti critici $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ per V che sono rispettivamente un punto di minimo locale e due punti di massimo assoluto.



Per il sistema otteniamo tre punti fissi

$P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,0)$

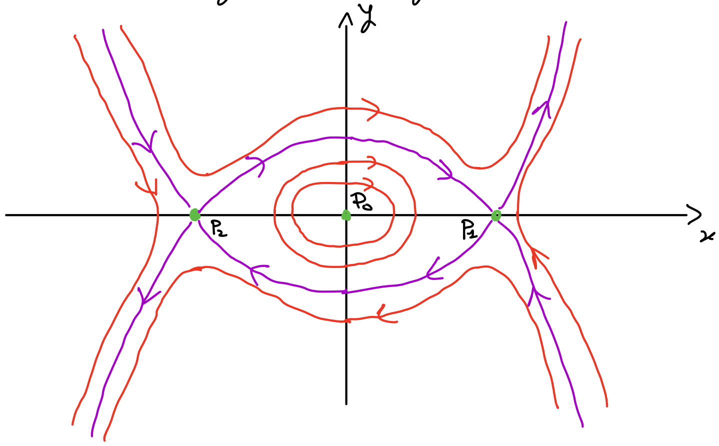
che sono di tipo centro (P_0) e di tipo sella (P_1 e P_2). Inoltre in un intorno del centro avremo un insieme di orbite periodiche e, poiché $H(P_1) = H(P_2)$, ci saranno orbite eterocline tra i due punti di sella.

Queste informazioni si potevano ricavare anche usando che

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -V''(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1+3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det JF(P_1) = \det JF(P_2) = -4 < 0$, mentre $\det JF(P_0) = 2$, $\operatorname{tr} JF(P_0) = 0$ e $H(x,y)$ ha un minimo locale in P_0.

Possiamo disegnare il ritratto di fase, osservando che valgono le simmetrie $(x,y) \mapsto (x,-y)$ e $(x,y) \mapsto (-x,y)$.



$\boxed{(b)\ \mu = 1}$ In questo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x + x^3 - x^5 \end{cases}$$

Cerchiamo i punti fissi. L'unica soluzione di

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x(x^4 - x^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

è $\underline{P_0 = (0,0)}$ in quanto $x^4 - x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

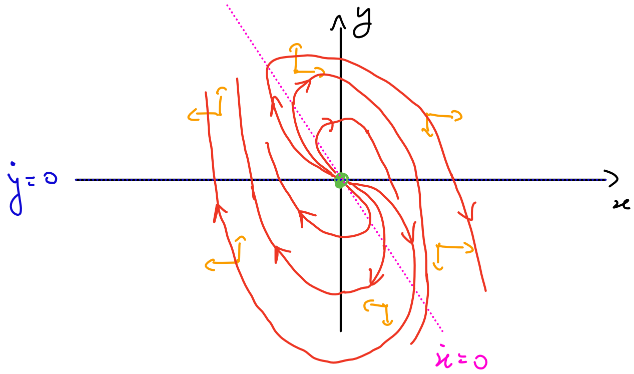
Si ha $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1+3x^2-5x^4 & 0 \end{pmatrix}$ e $JF(P_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Poiché $\det JF(P_0) = 2$, $\operatorname{tr} JF(P_0) = 3$ e $(\operatorname{tr} JF(P_0))^2 - 4 \det JF(P_0) = 1$,

P_0 è un punto fisso iperbolico di tipo nodo instabile.

Osserviamo che $\operatorname{div} F(x,y) = 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, quindi non ci sono orbite periodiche.

Non risultano esserci evidenti insiemi invarianti, dunque disegniamo il ritratto di fase utilizzando il segno del campo di vettori e la simmetria $(x(t), y(t)) \to (-x(t), -y(t))$.



$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

$$\begin{cases} \dot x = x - y - (x^2+y^2)x + \frac{\mu}{4}\frac{x^2y}{x^2+y^2} \\ \dot y = x + y - (x^2+y^2)y + \frac{\mu}{4}\frac{xy^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Scriviamo il sistema in coordinate polari (ρ, ϑ) con $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$.

$$\dot\rho = \frac{1}{\rho}(x\dot x + y\dot y) = \frac{1}{\rho}\left[x^2 - xy - (x^2+y^2)x^2 + \frac{\mu}{4}\frac{x^3y}{x^2+y^2} + xy + y^2 - (x^2+y^2)y^2 + \frac{\mu}{4}\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[x^2+y^2 - (x^2+y^2)^2 + \frac{\mu}{4}xy\right] = \rho - \rho^3 + \frac{\mu}{4}\rho\cos\vartheta\sin\vartheta$$

$$\dot\vartheta = \frac{1}{\rho^2}(x\dot y - y\dot x) = \frac{1}{\rho^2}\left[x^2 + xy - (x^2+y^2)xy + \frac{\mu}{4}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - xy + y^2 + (x^2+y^2)yx - \frac{\mu}{4}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}(x^2+y^2) = 1$$

Dunque

$$\begin{cases} \dot\rho = \rho\left(1 + \frac{\mu}{4}\sin\vartheta\cos\vartheta - \rho^2\right) \\ \dot\vartheta = 1 \end{cases}$$

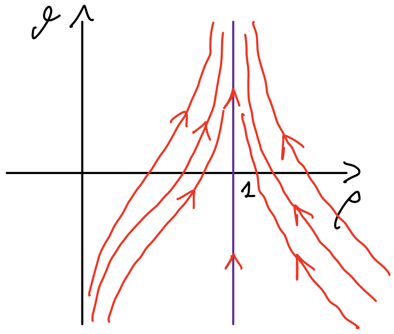
$\boxed{(a)\ \mu = 0}$ In questo caso il sistema in coordinate polari diventa

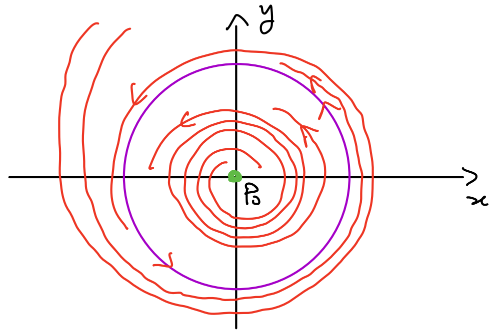
$$\begin{cases} \dot\rho = \rho(1-\rho^2) \\ \dot\vartheta = 1 \end{cases}$$

Otteniamo quindi che l'unico punto fisso è $P_0 = (0,0)$ infatti $(\dot\rho, \dot\vartheta) \neq (0,0)$ $\forall(\rho,\vartheta) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e il campo si annulla in P_0.

Nelle coordinate (ρ,ϑ) c'è l'insieme invariante $\{\rho = 1\}$ che corrisponde in (x,y) all'insieme $\{x^2+y^2 = 1\}$, che risulta essere un'orbita periodica.

Infine $\dot\rho > 0$ per $\rho \in (0,1)$, $\dot\rho < 0$ per $\rho \in (1,+\infty)$, e $\dot\vartheta = 1 > 0$ $\forall(\rho,\vartheta)$. Quindi il ritratto di fase è il seguente in (ρ,ϑ) e in (x,y).





$\boxed{(a)\ \mu = 1}$ In questo caso il sistema in coordinate polari diventa

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho\left(1 + \frac{1}{4}\sin\vartheta\cos\vartheta - \rho^2\right) \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

Per mostrare l'esistenza di un'orbita periodica usiamo il Teorema di Poincaré–Bendixson. Dobbiamo trovare un insieme $D \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ compatto, che non contiene punti fissi, e per il quale esiste $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ con la proprietà che $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi_{t_0}(x_0,y_0) \in D$ e $\varphi_t(x_0,y_0) \in D \ \ \forall\, t \geq t_0$.

L'unico punto fisso del sistema è $P_0 = (0,0)$, e lavorando in coordinate polari, conviene cercare D della forma $D = \{ c_1 \leq \rho \leq c_2 \}$ con $c_2 > c_1 > 0$.
Perché valgano tutte le ipotesi del teorema è sufficiente mostrare che $\exists\, c_2 > c_1 > 0$ tali che $\min_{\{\rho = c_1\}} \dot{\rho}(\rho,\vartheta) > 0$ e $\max_{\{\rho = c_2\}} \dot{\rho}(\rho,\vartheta) < 0$.

Ricordando che $-\frac{1}{2} \leq \sin\vartheta\cos\vartheta \leq \frac{1}{2}$ $\forall\, \vartheta \in \mathbb{R}$, abbiamo le stime

$$\rho\left(\frac{7}{8} - \rho^2\right) \leq \dot{\rho} \leq \rho\left(\frac{9}{8} - \rho^2\right) \qquad \forall\, (\rho,\vartheta)$$

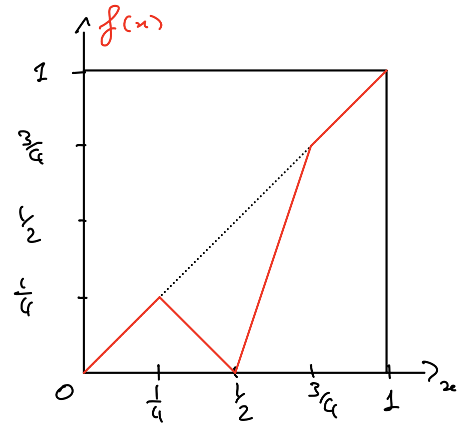
e dunque $\min_{\{\rho = \frac{1}{2}\}} \dot{\rho} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} > 0$, $\max_{\{\rho = \frac{3}{2}\}} \dot{\rho} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4}\right) = -\frac{27}{16} < 0$.

Quindi $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4} \right\}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Poincaré–Bendixson e dunque in D è contenuta un'orbita periodica del sistema.

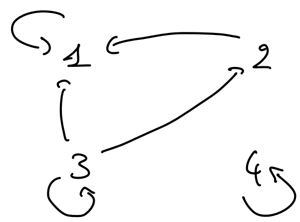
ESERCIZIO 3

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in J_1=[0,\frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2}-x, & x\in J_2,\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ 3(x-\frac{1}{2}), & x\in J_3,\ [\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ x, & x\in J_4,\ [\frac{3}{4},1] \end{cases}$$

Disegniamo il grafico di $f(x)$



a) L'f-grafo associato alla partizione $J=\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ è



b) Se $x\in J_1\cup J_4$, si ha $f(x)=x$, quindi $\omega(x)=x$.

Se $x\in J_2$, si ha $f(x)=\frac{1}{2}-x\in J_1$ e quindi $f^k(x)=\frac{1}{2}-x$ $\forall k\geq 1$.

Di conseguenza $\omega(x)=\{\frac{1}{2}-x\}$.

Se $x\in J_3\setminus\{\frac{3}{4}\}$, $\exists\ k(x)\in\mathbb{N}$ t.c. $f^{k(x)}\in J_1\cup J_2$. Infatti se $\{f^j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ fosse in J_3 si avrebbe $f^{j+1}(x)<f^j(x)$ e $f^{j+1}(x)-f^j(x)=2f^j(x)-\frac{3}{2}<2x-\frac{3}{2}<0$.

Quindi $\{f^j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ sarebbe strettamente decrescente e non limitata dal basso, che è assurdo. Di conseguenza se $f^{k(x)}(x)\in J_2$ si ha $\omega(x)=\{\frac{1}{2}-f^{k(x)}(x)\}$, e se $f^{k(x)}\in J_1$ si ha $\omega(x)=\{f^{k(x)}(x)\}$.

c) Da quanto visto ai punti a) e b) possiamo dedurre che non esistono orbite periodiche di periodo minimo $p\geq 2$. Quindi f non ha comportamento caotico.