Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 16-07-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{z-2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-z} \\ |z| \leq |z-2-2i| \\ i(z-\bar{z}) \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) (i) Scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che L_A sia iniettiva e $L_A(v) = 2v$ per ogni $v \in V = \{x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$;

(ii) determinare se la matrice A del punto precedente è triangolabile o diagonalizzabile e, in caso affermativo, rispetto a quale base.

Esercizio 3. (6 punti) Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \\ 2x_1 + (1+k)x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

(*Suggerimento: ricordarsi del Teorema di Cramer*)

Esercizio 4. (6 punti) Dire se esistono in $\mathbb{R}^3$ tre rette r_1, r_2, r_3, distinte e passanti per l'origine, tali che

$$r_3 \subset r_1 + r_2$$

Esercizio 5. (6 punti) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni cartesiane di immagine e nucleo dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+k & 2 \\ k & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

- **<u>Esercizio 1</u>** *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} e^{z-2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-z} \\ |z| \leq |z-2-2i| \\ i(z-\bar{z}) \leq 0 \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema nella forma

$$e^{z-2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-z} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{z-2} = e^{\frac{\pi}{4}i - z}$$

da cui, per la periodicità dell'esponenziale nel campo complesso, troviamo

$$z - 2 = \frac{\pi}{4}i - z + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = 1 + i\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$d(z,0) \leq d(z, 2+2i) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 2$$

e la terza si traduce in

$$\mathrm{Im}(z) \geq 0$$

Quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$0 \leq \frac{\pi}{8} + k\pi \leq 1,$$

da cui si ricava che l'unica soluzione del sistema è

$$z = 1 + i\frac{\pi}{8}$$

- **<u>Esercizio 2</u>** *(i) Scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che L_A sia iniettiva e $L_A(v) = 2v$ per ogni $v \in V = \{x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$;*

Troviamo innanzitutto una base di V e la completiamo a una base di $\mathbb{R}^3$. Si trova

$$V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e quindi una possibile base di $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(basta infatti verificare che i tre vettori sono linearmente indipendenti). A questo punto si tratta di definire L_A sui vettori di $\mathcal{B}$ in modo che vengano soddisfatte le richieste. Poniamo allora

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in modo che sia verificato che $L_A(v) = 2v$ per ogni $v \in V$, e

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per ottenere l'iniettività di L_A.

Infine per scrivere la matrice A dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo $L_A(e_1) = e_1$, e per gli altri due

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e_1 \qquad \Longrightarrow \qquad L_A(e_2) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e_1 \qquad \Longrightarrow \qquad L_A(e_3) = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) determinare se la matrice A del punto precedente è triangolabile o diagonalizzabile e, in caso affermativo, rispetto a quale base.

Osserviamo innanzitutto che la matrice A è già in forma triangolare. Inoltre i vettori della base $\mathcal{B}$ sono, per come abbiamo definito L_A, autovettori di autovalori $\{2, 2, 1\}$. Quindi certamente A è diagonalizzabile rispetto alla base $\mathcal{B}$.

L'esercizio si poteva risolvere anche senza calcoli facendo notare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

verifica le richieste ed è già in forma diagonale, quindi rispetto alla base canonica.

- **Esercizio 3** *Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \\ 2x_1 + (1+k)x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Il sistema lineare è quadrato, quindi calcoliamo innanzitutto il determinante della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 1+k & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Si trova $\det(A) = 9k$, quindi se $k \neq 0$ il sistema ha un'unica soluzione, mentre se $k = 0$ dobbiamo studiare il rango di A e della matrice completa A'.

Nel caso $k \neq 0$ usiamo il Teorema di Cramer per scrivere la soluzione. Si trova

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 1+k & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{k^2+2}{3k}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{2(k-1)}{3k}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1+k & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{k+2}{3k}$$

Studiamo ora il caso $k = 0$. La matrice dei coefficienti diventa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

e ha rango 2. La matrice completa è invece la matrice

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

che ha rango 3 (considerare la sottomatrice 3×3 data dalle ultime 3 colonne). Quindi per $k = 0$ il sistema non è compatibile.

- **Esercizio 4** *Dire se esistono in $\mathbb{R}^3$ tre rette r_1, r_2, r_3, distinte e passanti per l'origine, tali che*

$$r_3 \subset r_1 + r_2$$

Per trovare le tre rette richieste, cerchiamo 3 vettori v_1, v_2, v_3 distinti che verifichino

$$v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

Prendiamo quindi per esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le tre rette sono allora $r_1 = \mathrm{Span}(v_1)$, $r_2 = \mathrm{Span}(v_2)$ e $r_3 = \mathrm{Span}(v_3)$.

- **Esercizio 5** *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni cartesiane di immagine e nucleo dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+k & 2 \\ k & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det(A) = -k^2+3k-2 = -(k-1)(k-2)$, quindi per $k \notin \{1,2\}$ la matrice definisce un'applicazione lineare invertibile. Allora per $k \notin \{1,2\}$ si ha $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$ e $\ker(L_A) = \{\underline{0}\}$, che in forma cartesiana si possono scrivere

$$\mathrm{Im}(L_A) = \{0 = 0\}\,, \qquad \ker(L_A) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Nel caso $k = 1$, riduciamo la matrice A a scala. Si ottiene

$$A \sim S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi troviamo $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$ e

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \{x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$$

mentre per il nucleo si trova $\dim(\ker(L_A)) = 1$ e

$$\ker(L_A) = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Notare che non abbiamo avuto bisogno di risolvere il sistema $S\underline{x} = \underline{0}$, visto che si richiedeva l'equazione cartesiana. Nel caso $k = 2$, riduciamo la matrice A a scala. Si ottiene

$$A \sim S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi troviamo $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$ e

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \{x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$$

mentre per il nucleo si trova $\dim(\ker(L_A)) = 1$ e

$$\ker(L_A) = \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$