Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Test del 16-02-2021

Esercizio 1 (1 punto). Per la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{y^4 + x^2 - 2y^2 - 2x + \frac{3}{2}}$$

quale affermazione è vera?

- la funzione ha un solo punto critico libero;
- la funzione ha esattamente due punti critici liberi;
- la funzione ha esattamente tre punti critici liberi;
- la funzione ha come dominio naturale $\mathbb{R}^2$;
- nessuna delle altre.

Esercizio 2 (3 punti). Dati

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ 4x^2 + y^2 \geq 1,\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$$

determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su Ω.

Esercizio 3 (3 punti). Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{\log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq -y,\ y \geq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

Esercizio 4 (3 punti). Dati il campo di vettori $\mathbf{F}$ e la curva $(\gamma, [0, 2\pi])$ seguenti

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \\ x + \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = \Big(3 + 2\cos\, t\,,\ 2\sin\, t \Big)$$

calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $(\gamma, [0, 2\pi])$.

Risposte

Esercizio 1. La funzione $f(x,y)$ è definita sui punti di $\mathbb{R}^2$ che verificano la condizione

$$y^4 + x^2 - 2y^2 - 2x + \frac{3}{2} \geq 0$$

e quindi il suo dominio naturale non è tutto $\mathbb{R}^2$. Studiamo adesso i punti critici di f. Nei punti interni al dominio la funzione è differenziabile, in quanto composizione di un polinomio e della funzione $h(t) = \sqrt{t}$. Quindi i punti critici liberi di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = 0 \\ y^4 + x^2 - 2y^2 - 2x + \frac{3}{2} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{y^4+x^2-2y^2-2x+\frac{3}{2}}} = 0 \\ \frac{2y^3-2y}{\sqrt{y^4+x^2-2y^2-2x+\frac{3}{2}}} = 0 \\ y^4 + x^2 - 2y^2 - 2x + \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$$

I numeratori delle prime due equazioni si annullano nei punti $(1,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$, ma la terza condizione ci dice che l'unico punto critico libero della funzione è $(1,0)$.

Esercizio 2. L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

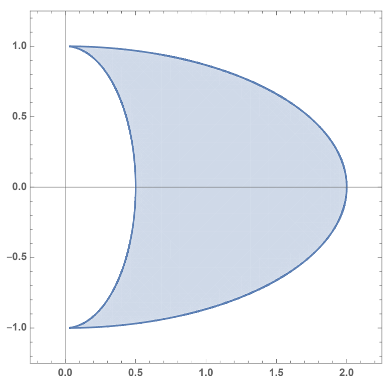

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω, sugli eventuali spigoli del bordo e sui punti critici vincolati al bordo di Ω.

La funzione f ha dominio naturale $\mathbb{R}^2$ ed è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tuttavia $(0,0)$ non appartiene a Ω, e la funzione non ha punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di Ω. Gli spigoli sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

e dunque sono i punti

$$S_1 = (0\,,\,-1) \quad \text{e} \quad S_2 = (0\,,\,1)\,.$$

Dividiamo poi il bordo in due parti

$$\Gamma_1 = \left\{4x^2 + y^2 = 1\,,\, x \geq 0\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \, , \, x \geq 0 \right\}$$

In entrambi i casi usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Per Γ_1 usiamo la funzione $G_1 = 4x^2 + y^2$ e quindi cerchiamo le soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G_1(x,y) \\ G_1(x,y) = 1 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 8x \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 2y \\ 4x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Poiché $x > 0$ possiamo semplificare nella prima equazione e ottenere $\lambda = \frac{1}{8\sqrt{x^2+y^2}}$. Sostituendo nella seconda equazione si trova

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{4\sqrt{x^2+y^2}}$$

che ha come unica soluzione $y = 0$. Otteniamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_1 = \left(\frac{1}{2} \, , \, 0 \right).$$

Per Γ_2 usiamo la funzione $G_2 = \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e quindi cerchiamo le soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla G_2(x,y) \\ G_2(x,y) = 1 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, \frac{x}{2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lambda \, 2y \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Poiché $x > 0$ possiamo semplificare nella prima equazione e ottenere $\lambda = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Sostituendo nella seconda equazione si trova

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

che ha come unica soluzione $y = 0$. Otteniamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_2 = (2 \, , \, 0) \, .$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = f(S_2) = 1 \, , \quad f(Q_1) = \frac{1}{2} \, , \quad f(Q_2) = 2 \, .$$

Quindi il massimo di f è 2 e il minimo è $\frac{1}{2}$.

Esercizio 3. L'insieme Ω è quello nella figura 2.

La forma di Ω e la funzione suggeriscono di cambiare variabili nell'integrale e usare le coordinate polari. Poniamo quindi $x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta$ e $y(\rho, \theta) = \rho \sin\theta$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, e sostituendo in Ω otteniamo che l'insieme su cui integrare rispetto alle variabili (ρ, θ) è l'insieme S dato da

$$S = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \ : \ \cos\theta \geq -\sin\theta, \ \sin\theta \geq \cos\theta, \ 1 \leq \rho \leq 2\} = \left\{ (\rho, \theta) \ : \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \ 1 \leq \rho \leq 2 \right\}$$

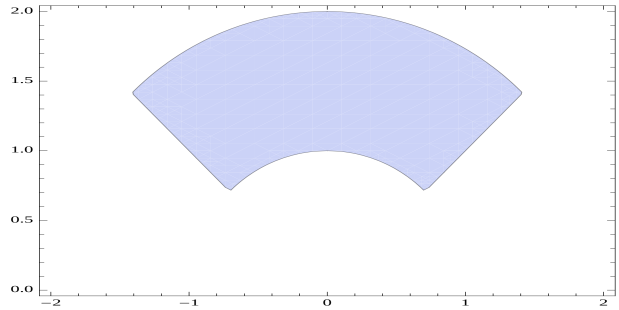

Figure 2: L'insieme Ω

Per l'integrale otteniamo quindi

$$\iint_\Omega \frac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_S \frac{2\log\,\rho}{\rho}\,d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Big(\int_1^2 \frac{2\log(\rho)}{\rho}\,d\rho\Big)\,d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Big(\log^2\,\rho\Big)\Big|_1^2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \log^2\,2\,d\theta = \frac{\pi}{2}\,\log^2\,2\,.$$

Esercizio 4. Il campo di vettori $\mathbf{F}$ è definito su $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e non è irrotazionale, infatti

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \Big(1 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) - \Big(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) = 1\,.$$

Quindi il campo non è conservativo in nessun dominio.

La curva è una parametrizzazione della circonferenza di centro $(3,0)$ e raggio 2, che ha equazione

$$(x-3)^2+y^2=4$$

Essendo la curva chiusa e percorsa in senso antiorario, possiamo applicare il Teorema del Rotore perché

$$U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,(x-3)^2+y^2\le 4\}\subset X$$

Quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy = \iint_U 1\,dxdy = 4\pi$$

essendo per definizione l'area di U.