Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 15-06-2022

Esercizio 1. **(12 punti)** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin x \,\cdot \cos x + \mu\, y(y^2 - \sin^2 x) \end{cases}$$

nell'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\pi \le x \le \pi\}$ e al variare di $\mu \in [0, +\infty)$.

(a) Per $\mu = 0$, determinare l'esistenza di un integrale primo e disegnare il ritratto di fase del sistema.

(b) Disegnare il ritratto di fase nel caso $\mu > 0$. Svolge ancora un ruolo l'integrale primo del punto (a)?

Esercizio 2. **(8 punti)** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y \\ \dot{y} = x^2 - 4y + \mu^2 \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Trovare i punti fissi del sistema e dire se si tratta di punti iperbolici.

(b) Disegnare il ritratto di fase nel caso $\mu = 0$.

Esercizio 3. **(10 punti)** Si consideri la famiglia di trasformazioni continue $f_\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$ data da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{2} + \lambda \sin\left(4\pi(x - \frac{1}{4})\right)\,, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \\ 2x - 1\,, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

per $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$.

(a) Discutere i punti fissi del sistema al variare del parametro λ, e studiarne la stabilità. Determinare il bacino di attrazione dei punti fissi attrattivi.

(b) Dimostrare che il sistema è caotico per $\lambda = \frac{1}{2}$.

(c) Dimostrare che il sistema è caotico per $\lambda = \frac{1}{4}$. (*Facoltativo:* cosa succede per $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$?)

Esercizio 1

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin x \cdot \cos x + \mu y (y^2 - \sin^2 x) \end{cases}$$

(a) Poniamo $\mu = 0$.

Osserviamo che in questo caso il sistema è un sistema meccanico della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases}$$

con $V(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 x$. Quindi se consideriamo l'hamiltoniana

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\sin^2 x$$

si ottiene che $\dot{H}(x,y) \equiv 0$, dunque $H(x,y)$ è un integrale primo.

Il ritratto di fase del sistema si ottiene quindi considerando gli insiemi di livello di $H(x,y)$.

Possiamo comunque determinare che i punti fissi sono

$P_1 = (-\pi, 0)$, $P_2 = (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $P_3 = (0,0)$, $P_4 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $P_5 = (\pi, 0)$

e per determinare la loro tipologia possiamo utilizzare la matrice Jacobiana del campo $JF(x,y)$ o la funzione $V(x)$.

Poiché

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

- P_1, P_3 e P_5 sono punti di tipo sella poiché

$$JF(P_1) = JF(P_3) = JF(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oppure poiché $V(x)$ ha un punto di massimo locale in corrispondenza della coordinata x dei punti.

Osserviamo inoltre che $H(P_1) = H(P_3) = H(P_5) = 0$, dunque i tre punti fissi si trovano sulla curva $y^2 = \sin^2 x$.

- P_2 e P_4 sono punti di <u>tipo centro</u> poiché

$$JF(P_2) = JF(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

oppure poiché $V(x)$ ha un punto di minimo locale in corrispondenza della coordinata x dei punti.

Inoltre anche se questi punti non sono iperbolici, sappiamo che il sistema ha un insieme di orbite periodiche in un loro intorno, determinate dalle curve di livello di $H(x,y)$. Si ha $H(P_2) = H(P_4) = -\frac{1}{2}$ e le orbite periodiche si trovano sulle curve $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$ con $c \in (-\frac{1}{2}, 0)$

Studiando le curve di livello $\{H(x,y) = c\}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$, dobbiamo studiare l'insieme di definizione di $\{\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\sin^2 x = c\}$.

Si trova che $y = \pm\sqrt{\sin^2 x + 2c}$ è ben definita per $\sin^2 x \geq -2c$

$\iff$ $\sin x \geq \sqrt{-2c}$ oppure $\sin x \leq -\sqrt{-2c}$

$\iff$ • $x \in [\frac{\pi}{2} - x_c, \frac{\pi}{2} + x_c] \cup [-\frac{\pi}{2} - x_c, -\frac{\pi}{2} + x_c]$

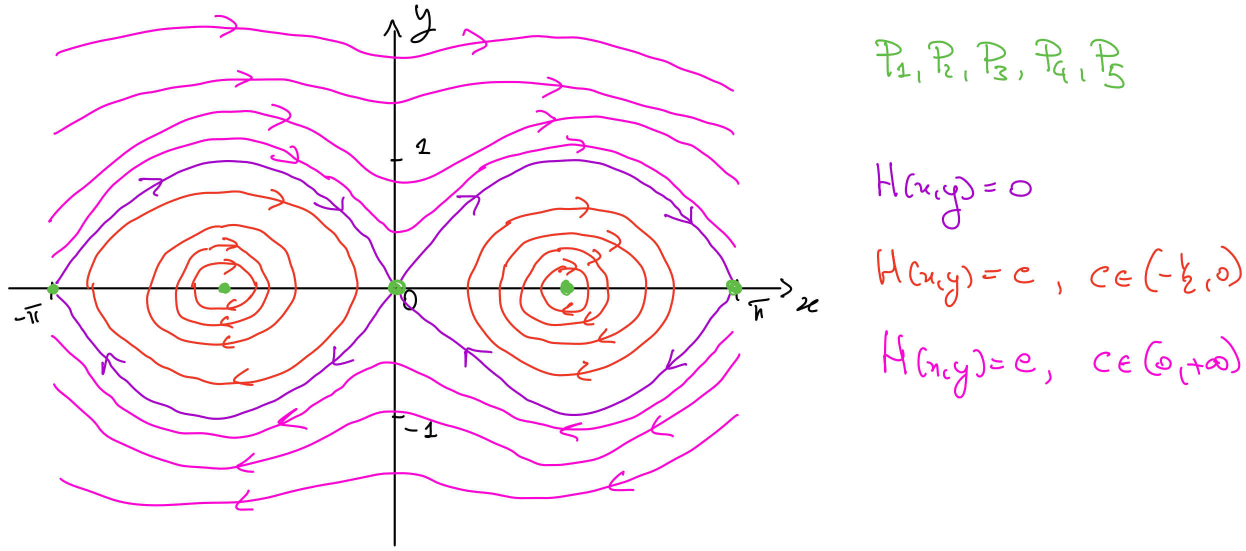
con $x_c := \arccos\sqrt{-2c} \in (0, \frac{\pi}{2})$ per $c \in (-\frac{1}{2}, 0)$;

• $x \in \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$ per $c = -\frac{1}{2}$;

• $\forall x \in [-\pi, \pi]$ per $c \geq 0$;

• per nessun x se $c < -\frac{1}{2}$.

Il ritratto di fase è il seguente



Il sistema ha proprietà di simmetria che si vedono bene nella forma degli insiemi di livello di $H(x,y)$.

(b) Consideriamo ora il caso generico $\mu>0$.

<u>I punti fissi del sistema</u> sono ancora

$P_1=(-\pi,0)$, $P_2=(-\frac{\pi}{2},0)$, $P_3=(0,0)$, $P_4=(\frac{\pi}{2},0)$, $P_5=(\pi,0)$

Usando

$$JF(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos^2x-\sin^2x-2\mu y\sin x\cdot\cos x & \mu(3y^2-\sin^2x) \end{pmatrix}$$

troviamo che

- P_1, P_3 e P_5 sono punti di <u>tipo sella</u> poiché

$$JF(P_1)=JF(P_3)=JF(P_5)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- P_2 e P_4 verificano

$$JF(P_2)=JF(P_4)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$$

e dunque $\det JF=1$, $\operatorname{tr} JF=-\mu<0$. Gli autovalori sono $\lambda_\pm = \dfrac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2-4}}{2}$, e verificano

- $\lambda_\pm \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Im}\,\lambda_\pm \neq 0$ e $\mathrm{Re}\,\lambda_\pm < 0$ se $\mu \in (0,2)$ e dunque P_2 e P_4 sono punti di <u>tipo fuoco stabile</u>

- $\lambda_+ = \lambda_- = -1$ se $\mu = 2$, e poiché la matrice JF non si diagonalizza, P_2 e P_4 sono punti di <u>tipo nodo improprio stabile</u>

- $\lambda_\pm \in (-\infty, 0)$ se $\mu > 2$, e dunque P_2 e P_4 sono punti di <u>tipo nodo stabile</u>

I punti P_2 e P_4 sono dunque iperbolici $\forall \mu > 0$.

<u>Consideriamo la funzione $H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} \sin^2 x$.</u> Si trova

$$\dot{H}(x,y) = y\dot{y} - (\sin x \cos x)\dot{x} =$$

$$= y\left[\sin x \cdot \cos x + \mu y (y^2 - \sin^2 x)\right] - (\sin x \cdot \cos x) y =$$

$$= \mu y^2 (y^2 - \sin^2 x) = 2\mu y^2 H(x,y)$$

Da cui si deduce che $\dot{H}(x,y)\big|_{H=0} \equiv 0$, e dunque

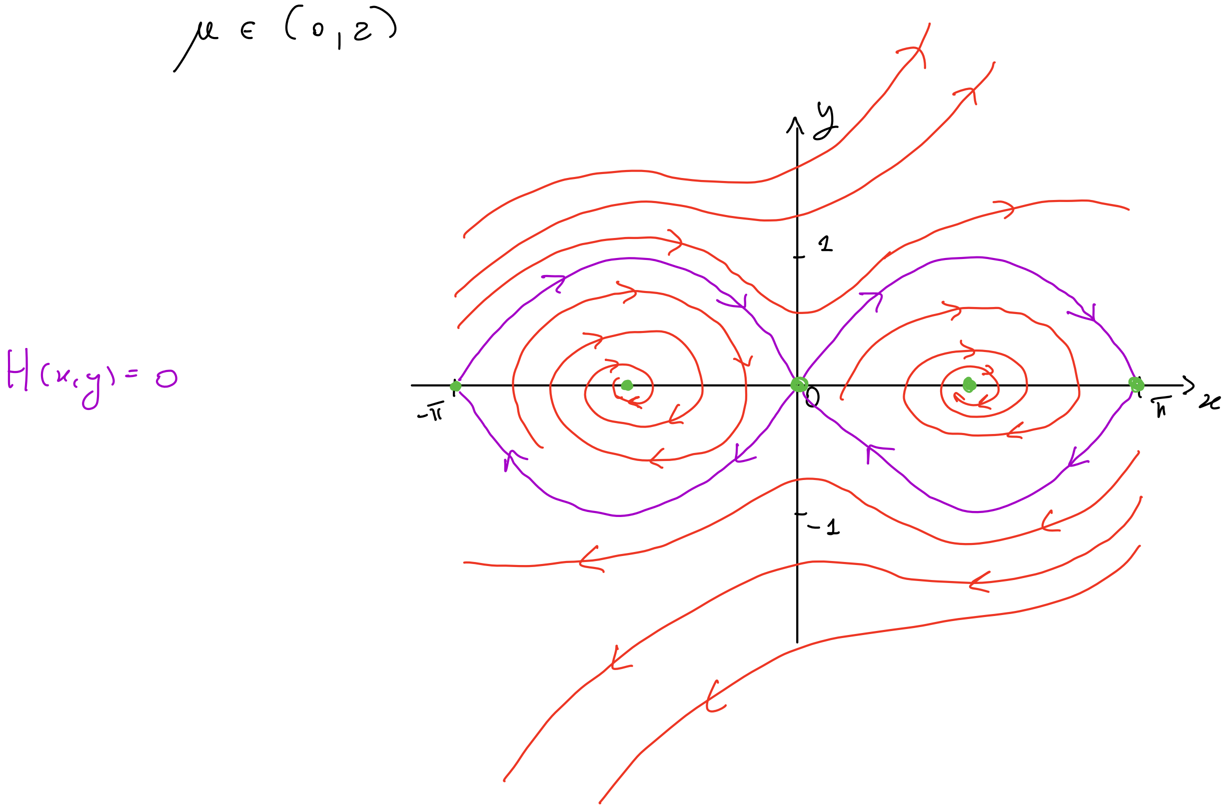
<u>l'insieme $\{H(x,y) = 0\}$ è invariante.</u>

Il sistema inoltre è <u>simmetrico</u> rispetto alla riflessione $(x,y) \longmapsto (-x,-y)$. Infatti se $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$ si trova

$$
\begin{cases}
\dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) = -y(t) = \tilde{y}(t) \\
\dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(t) = -\sin x(t) \cos x(t) - \mu\, y(t) \left(y^2(t) - \sin^2 x(t)\right) = \\
\qquad = \sin(-x(t)) \cos(-x(t)) + \mu(-y(t)) \left((-y(t))^2 - \sin^2(-x(t))\right) = \\
\qquad = \sin \tilde{x}(t) \cos \tilde{x}(t) + \mu\, \tilde{y}(t) \left(\tilde{y}(t)^2 - \sin^2 \tilde{x}(t)\right)
\end{cases}
$$

Disegniamo il ritratto di fase.

$\mu \in (0,2)$



Le orbite periodiche potrebbero esistere solo all'interno dei lobi delle curve $\{H(x,y)=0\}$. Ma sapendo come sono fatte le curve di livello di $H(x,y)$, e usando che

$$\dot{H}(x,y) = \mu y^2 H(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in \{H(x,y)<0,\ y \neq 0\}$$

otteniamo che non ci possono essere orbite periodiche.

I casi $\mu = 2$ e $\mu > 2$ differiscono qualitativamente solo per la dinamica in un intorno di P_2 e P_4.

Esercizio 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x+2y \\ \dot{y} = x^2-4y+\mu^2 \end{cases}$$

- Punti fissi

Ponendo $\begin{cases} -2x+2y=0 \\ x^2-4y+\mu^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ x^2-4x+\mu^2=0 \end{cases}$ si trova che il sistema verifica

- $\nexists$ punti fissi se $|\mu|>2$;
- $\exists$ un unico punto fisso $P=(2,2)$ se $|\mu|=2$;
- $\exists$ due punti fissi

$$P_1 = \left(2+\sqrt{4-\mu^2},\ 2+\sqrt{4-\mu^2}\right),\quad P_2 = \left(2-\sqrt{4-\mu^2},\ 2-\sqrt{4-\mu^2}\right)$$

se $|\mu|<2$.

Se $|\mu|=2$, si ha

$$JF(P) = JF(2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-6$. Dunque il punto P <u>non è iperbolico</u>.

Se $|\mu|<2$, si ha

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4+2\sqrt{4-\mu^2} & -4 \end{pmatrix},\quad JF(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4-2\sqrt{4-\mu^2} & -4 \end{pmatrix}$$

e quindi:

- $\det JF(P_1) = -4\sqrt{4-\mu^2} < 0 \implies P_1$ è <u>punto di sella</u>
- $\det JF(P_2) = 4\sqrt{4-\mu^2} > 0$, $\operatorname{tr} JF(P_2) = -6 < 0$ e poiché

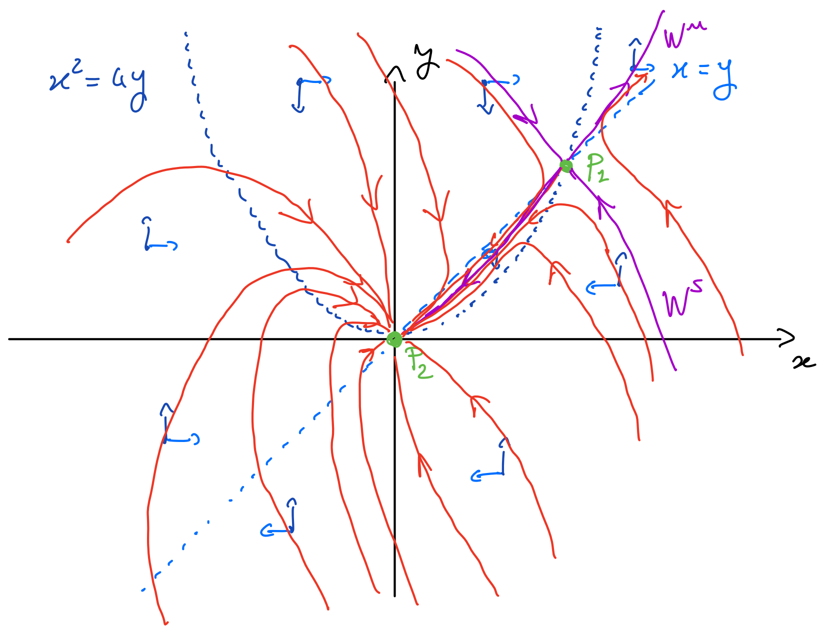
$$(\operatorname{tr} JF(P_2))^2 - 4(\det JF(P_2)) = 36 - 16\sqrt{4-\mu^2} > 0 \quad \forall\, |\mu| < 2$$

il punto P_2 è <u>punto di tipo nodo stabile</u>.

– Ponendo $\mu = 0$, abbiamo dunque $P_1 = (4,4)$ e $P_2 = (0,0)$

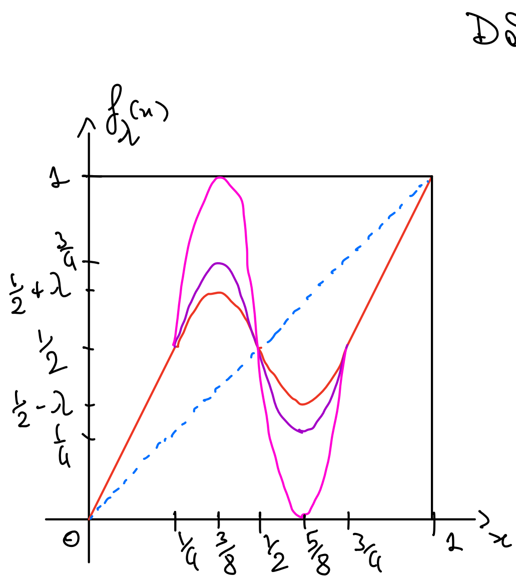
Non esistono <u>orbite periodiche</u> poiché $\operatorname{div} F(x,y) = -6 < 0 \quad \forall (x,y)$.

Usiamo il segno del campo per disegnare il ritratto di fase.



<u>Esercizio 3</u>

Data



$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} + \lambda \sin\left(4\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right), & \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 2x - 1, & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

con $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, si trova il grafico a sinistra

per $\lambda \in (0, \frac{1}{4})$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

(a) Per ogni $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, i punti fissi sono

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{1}{2}, \qquad x_3 = 1.$$

La funzione f_λ è derivabile $\forall x \neq \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ (con derivata solo destra in 0, e solo sinistra in 1), e si trova

- $f_\lambda'(x_1) = 2 \implies$ x_1 è repulsivo $\forall \lambda \in (0, \frac{1}{2}]$
- $f_\lambda'(x_3) = 2 \implies$ x_3 è repulsivo $\forall \lambda \in (0, \frac{1}{2}]$

- $f_\lambda'(x_2) = 4\pi\lambda \cos(4\pi(x_2 - \frac{1}{4})) = 4\pi\lambda \cos\pi = -4\pi\lambda$, quindi
  - se $\lambda \in (0, \frac{1}{4\pi})$, si ha $|f_\lambda'(x_2)| < 1$, e x_2 è quindi attrattivo;
  - se $\lambda \in (\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{2}]$, si ha $|f_\lambda'(x_2)| > 1$, e x_2 è quindi repulsivo;
  - se $\lambda = \frac{1}{4\pi}$, si ha $f_\lambda'(x_2) = -1$, e la derivata Schwarziana verifica

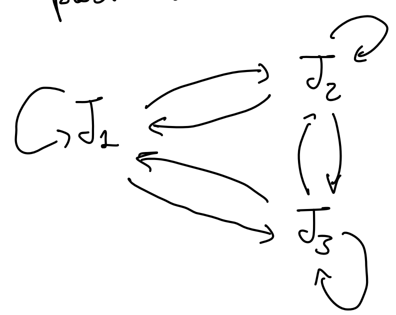
$$Sf_{\frac{1}{4\pi}}(x_2) = \frac{f_{\frac{1}{4\pi}}'''(x_2)}{f_{\frac{1}{4\pi}}'(x_2)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f_{\frac{1}{4\pi}}''(x_2)}{f_{\frac{1}{4\pi}}'(x_2)}\right)^2 = -(4\pi)^2 < 0,$$

e quindi x_2 è attrattivo

Dunque l'unico punto fisso attrattivo è $x_2 = \frac{1}{2}$ per $\lambda \in (0, \frac{1}{4\pi}]$. Per determinare il suo bacino di attrazione, osserviamo innanzitutto che tutte le orbite si trovano definitivamente nell'intervallo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Inoltre $f_\lambda([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]) = [\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2} + \lambda] \subset (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ per $\lambda \leq \frac{1}{4\pi} < \frac{1}{8}$. Osservando che per ogni $x \in (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ si ha $|f_\lambda(\frac{1}{2}) - f_\lambda(x)| \leq 4\pi\lambda\, |\frac{1}{2} - x|$ e $4\pi\lambda < 1$ per $\lambda \in (0, \frac{1}{4\pi})$, si mostra che il bacino di attrazione di x_2 è $(0, 1)$

per ogni $\lambda \in \left(0, \frac{1}{4n}\right)$. Il caso $\lambda = \frac{1}{4n}$ funziona allo stesso modo, verificando che $\left|f_\lambda^n(x) - \frac{1}{2}\right|$ è decrescente $\forall x \in \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$.

(b) Ponendo $\lambda = \frac{1}{2}$, possiamo mostrare che esiste un'orbita periodica di periodo 3. Quindi $f_{\frac{1}{2}}$ risulta caotica.
Consideriamo la partizione $\{J_1, J_2, J_3\}$ di $[0,1]$ data da $J_1 = \left[0, \frac{3}{8}\right]$, $J_2 = \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right]$, $J_3 = \left[\frac{5}{8}, 1\right]$. Allora il grafo associato alla partizione è

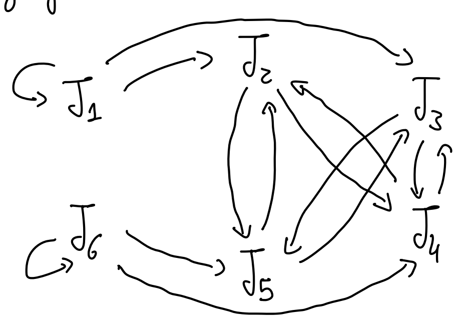


Un cammino ammissibile è dunque $J_2 J_1 J_3 J_1$, che mostra l'esistenza di un punto periodico di periodo minimo 3.

(c) Nel caso $\lambda = \frac{1}{4}$ è possibile mostrare l'esistenza di un punto periodico di periodo minimo 6, che non essendo una potenza di 2 garantisce che $f_{\frac{1}{4}}$ è caotica.
Consideriamo la partizione $\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$ di $[0,1]$ data da $J_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $J_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$, $J_3 = \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$, $J_4 = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$,

$$J_5 = \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right], \quad J_6 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

che ha grafo associato



Un cammino ammissibile è dunque $J_2\, J_5\, J_3\, J_4\, J_3\, J_5\, J_2$, che mostra l'esistenza di un punto periodico di periodo minimo 6, visto che il cammino non ha un sottocammino di lunghezza 1, 2 o 3 che si ripete, e i punti di intersezione tra gli intervalli non sono periodici.

<u>Facoltativo</u>: se $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ si può continuare ad usare il grafo associato alla partizione di prima, oppure studiare l'iterata f_λ^2 ristretta a $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Osserviamo infatti che le orbite verificano:

$$\frac{1}{4} \longrightarrow f_\lambda\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \longrightarrow f_\lambda^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} \longrightarrow f_\lambda\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} + \lambda > \frac{3}{4} \longrightarrow f_\lambda^2\left(\frac{3}{8}\right) = f_\lambda\left(\frac{1}{2}+\lambda\right) > f_\lambda\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

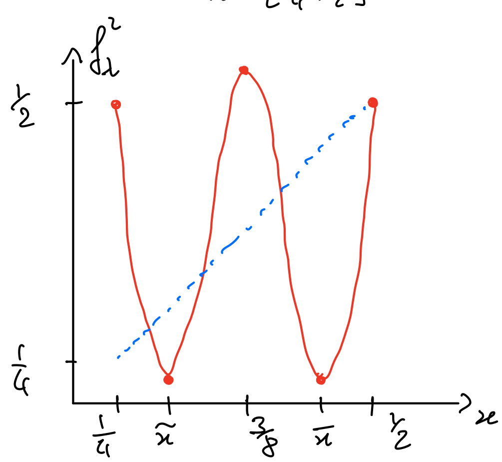
$$\frac{1}{2} \longrightarrow f_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \longrightarrow f_\lambda^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

quindi $f_\lambda\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) \supset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ ed esistono $\tilde{x} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$ e $\bar{x} \in \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ t.c. $f_\lambda(\tilde{x}) = f_\lambda(\bar{x}) = \frac{5}{8}$. Dunque

$$\tilde{x} \longrightarrow f_\lambda(\tilde{x}) = \frac{5}{8} \longrightarrow f_\lambda^2(\tilde{x}) = f_\lambda\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} - \lambda < \frac{1}{4}$$

$$\bar{x} \longrightarrow f_\lambda(\bar{x}) = \frac{5}{8} \longrightarrow f_\lambda^2(\bar{x}) = f_\lambda\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{2} - \lambda < \frac{1}{4}$$

e il grafico di $f_\lambda^2\big|_{\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]}$ è dunque di questo tipo



Ne segue che $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ricopre sè stesso almeno 4 volte per f_λ^2, e dunque f_λ è caotico.