Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova parziale del 12-11-2018

Esercizio 1. (10 punti) Studiare al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ con $\mu \neq 1$, la stabilità dell'origine per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\mu y + y - x^3 - 2x^5 \\ \dot{y} &= 2x - y^5 - 3\mu y^7 \end{cases}$$

Esercizio 2. (12 punti) Studiare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - y^2 + 2x \\ \dot{y} &= x - x^3 \end{cases}$$

Esercizio 3. (12 punti) Sia $f(x) = \{\frac{1}{2} + 3x - 6x^2 + 4x^3\}$ una funzione $f : [0,1) \to [0,1)$, dove ricordiamo che $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria di un numero reale.

(i) Fare un disegno del grafico di f.

(ii) Mostrare l'esistenza di almeno un'orbita periodica di periodo 2, e studiarne la stabilità.

(iii) Dire se esistono almeno due orbite periodiche di periodo 2 distinte.

(iv) Dire se esistono orbite periodiche di periodo 7.

Svolgimento

Esercizio 1. *Studiare al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ con $\mu \neq 1$, la stabilità dell'origine per il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\mu y + y - x^3 - 2x^5 \\ \dot{y} &= 2x - y^5 - 3\mu y^7 \end{cases}$$

Si verifica che l'origine $(0,0)$ è un punto fisso del sistema di equazioni differenziali. La matrice jacobiana del campo di vettori nell'origine è data da

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} -3x^2 - 10x^4 & -\mu + 1 \\ 2 & -5y^4 - 21\mu y^6 \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu + 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi gli autovalori di $JF(0,0)$ sono soluzioni dell'equazione $\lambda^2 + 2(\mu - 1) = 0$. Ne segue che vanno trattati separatamente i casi $\mu < 1$ e $\mu > 1$.

Per $\mu < 1$, gli autovalori sono $\lambda_1 = -\sqrt{2(1-\mu)}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2(1-\mu)}$. Essendo reali e non-nulli, si ha che $(0,0)$ è un punto fisso iperbolico, ed in particolare è una sella, essendo gli autovalori discordi. Possiamo quindi applicare il Teorema di Hartman-Grobman e concludere che si tratta di un punto fisso instabile.

Per $\mu > 1$, gli autovalori sono $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{2(\mu-1)}$, immaginari puri coniugati. Di conseguenza, $(0,0)$ è un punto fisso non iperbolico, la cui linearizzazione corrisponde a un centro.Per la stabilità non possiamo usare il Teorema di Hartman-Grobman, e proviamo ad applicare il metodo di Lyapunov.

Poniamo $V(x,y) = ax^2 + by^2$, e abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= 2ax(-\mu y + y - x^3 - 2x^5) + 2by(2x - y^5 - 3\mu y^7) \\ &= 2xy\Big(-a(\mu-1) + 2b\Big) - 2\Big(ax^4 + 2ax^6 + by^6 + 3\mu y^8\Big) \end{aligned}$$

Scegliendo $a = 2$ e $b = \mu - 1$, troviamo che V è una funzione di Lyapunov stretta per $(0,0)$, e quindi $(0,0)$ è un punto fisso asintoticamente stabile.

Esercizio 2. *Studiare il ritratto di fase del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - y^2 + 2x \\ \dot{y} &= x - x^3 \end{cases}$$

Iniziamo trovando i punti fissi. Dalla seconda componente del campo si trova $x - x^3 = 0$ se e solo se $x \in \{0, -1, +1\}$. Sostituendo nella prima componente, si trovano tre casi

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y - y^2 = 0 \quad \text{da cui} \quad y = 0, 1$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad y - y^2 - 2 = 0 \quad \text{che non ha soluzioni reali}$$

$$x = +1 \quad \Rightarrow \quad y - y^2 + 2 = 0 \quad \text{da cui} \quad y = -1, 2$$

I punti fissi sono quindi

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Studiamo ora la linearizzazione del sistema nei punti fissi trovati per studiarne la stabilità. La matrice jacobiana del campo di vettori è data da

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 - 2y \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e sostituendo i punti fissi troviamo:

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, con autovettore $v_1 = (1 + \sqrt{2}\,, 1)$, e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, con autovettore $v_2 = (1 - \sqrt{2}\,, 1)$. P_1 è quindi un punto fisso iperbolico di tipo sella;

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalore doppio $\lambda = 1$, e con molteplicità geometrica 1. P_2 è quindi un punto fisso iperbolico instabile, con linearizzazione di tipo nodo improprio. La dinamica del sistema nell'intorno del punto può quindi corrispondere a un nodo o a un fuoco;

$$JF(P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\lambda_\pm = 1 \pm i\sqrt{5}$. P_3 è quindi un punto fisso iperbolico di tipo fuoco instabile;

$$JF(P_4) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 1 + \sqrt{7}$, con autovettore $v_1 = (-\frac{\sqrt{7}+1}{2}\,, 1)$, e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{7}$, con autovettore $v_2 = (\frac{\sqrt{7}-1}{2}\,, 1)$. P_4 è quindi un punto fisso iperbolico di tipo sella.

Possiamo quindi determinare la dinamica negli intorni dei punti fissi P_1, P_3 e P_4, conoscendo anche le direzioni a cui sono tangenti le varietà stabili e instabili per i punti di sella. Per disegnare il ristratto di fase vanno poi studiate le regioni in cui le componenti del campo hanno segno costante.

Vanno poi fatte due osservazioni: le varietà stabili di P_1 e P_4 hanno come α-limite necessariamente P_2; grazie al criterio di Bendixson non esistono orbite periodiche.

Infine considerazioni sul comportamento asintotico per $x \to +\infty$ del campo, permette di concludere che non ci sono soluzioni con $x(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$.

Mettendo insieme tutte le informazioni si ottiene il ritratto in figura 1.

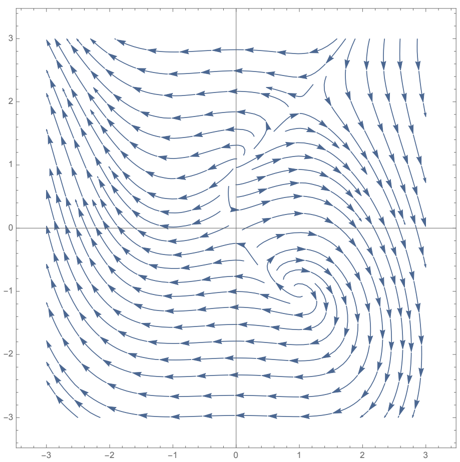

Figure 1:

Esercizio 3. *Sia* $f(x) = \{\frac{1}{2} + 3x - 6x^2 + 4x^3\}$ *una funzione* $f : [0,1) \to [0,1)$*, dove ricordiamo che* $\{\cdot\}$ *indica la parte frazionaria di un numero reale.*
(i) Fare un disegno del grafico di f*.*

Per il disegno del grafico della funzione, studiamo innanzitutto il grafico della funzione $g(x) = \frac{1}{2} + 3x - 6x^2 + 4x^3$. Si osserva che $g(0) = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \frac{3}{2}$. Calcolando la derivata, si trova $g'(x) = 3 - 12x - 12x^2$, che verifica $g'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1)$, e $g'(x) = 0$ solo in $x = \frac{1}{2}$, con $g(\frac{1}{2}) = 1$. Dunque per la funzione f vale

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ g(x) - 1\,, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Si ottiene quindi il grafico in figura 2. Osserviamo che f non ha punti fissi.

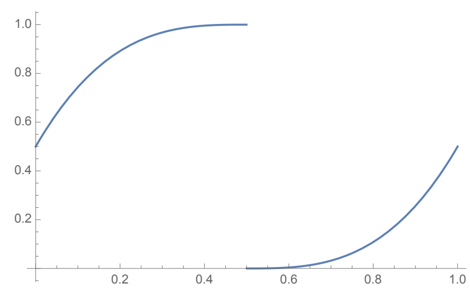

Figure 2:

(ii) Mostrare l'esistenza di almeno un'orbita periodica di periodo 2, e studiarne la stabilità.

Dai dati che ci hanno permesso di disegnare il grafico, ricaviamo che $f(0) = \frac{1}{2}$ e $f(\frac{1}{2}) = 0$, quindi $\{0, \frac{1}{2}\}$ è un'orbita periodica di periodo minimo 2. Inoltre per la sua stabilità calcoliamo

$$\frac{d}{dx}\, f^2(x)\Big|_{x=0} = f'(0) f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

(l'utilizzo di $f'(\frac{1}{2}) = 0$ va giustificato!). Quindi l'orbita è attrattiva.

(iii) Dire se esistono almeno due orbite periodiche di periodo 2 distinte.

Per determinarlo, possiamo abbozzare il grafico di f^2 e vedere quanti punti fissi può avere. Usando che la funzione f^2 ha derivata nulla in 0 e $\frac{1}{2}$, che sono anche punti fissi, e che la funzione è continua in $(0, 1)$, si ottiene che devono necessariamente esistere almeno altri due punti fissi di f^2, e quindi almeno un'orbita periodica di periodo 2 distinta da $\{0, \frac{1}{2}\}$.

Il grafico della funzione f^2 è rappresentato in figura 3, insieme alla funzione identità, utile per trovare i punti fissi.

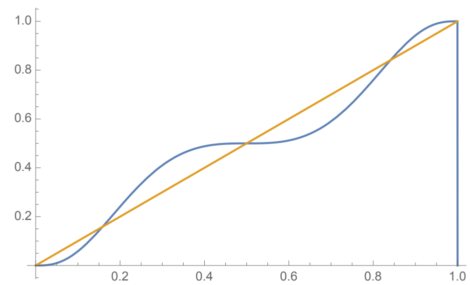

Figure 3:

(iii) Dire se esistono orbite periodiche di periodo 7.

Dal grafico di f^2, o da osservazioni elementari sulla continuità e monotonia della funzione f^2, si conclude che ogni condizione iniziale diversa dai punti fissi di f^2, ha orbita che converge per f^2 verso uno dei punti fissi 0 e $\frac{1}{2}$, o verso 1. Dunque non possono esistere orbite periodiche di periodo 7.