Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 10-02-2022

Esercizio 1. (12 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\mu\, x + y \\ \dot{y} = x^2 + 3\mu\, y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (8 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - (x + 2y)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = y + (2x - y)(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la trasformazione $f : [0, 1) \to [0, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ 2x - \frac{2}{3}, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ 3x - 2, & \text{se } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \end{cases}$$

(i) Si costruisca un subshift di tipo finito σ coniugato ad f con matrice di transizione associata A_σ.

(ii) Si calcoli il numero di punti fissi di f^n (rispetto ad n) e si mostri che f è topologicamente mixing.

(iii) Si calcoli la funzione ζ_A.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\mu x + y \\ \dot{y} = x^2 + 3\mu y \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

CASO $\mu = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

- Punti fissi $= \{(0,0)\}$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \qquad JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_1 = (0,0)$ è punto fisso non iperbolico

- Ponendo $H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} x^3$ si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases}, \text{ quindi il sistema è Hamiltoniano}$$

Di conseguenza $H(x,y)$ è un integrale primo (si verifica infatti che $\dot{H}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

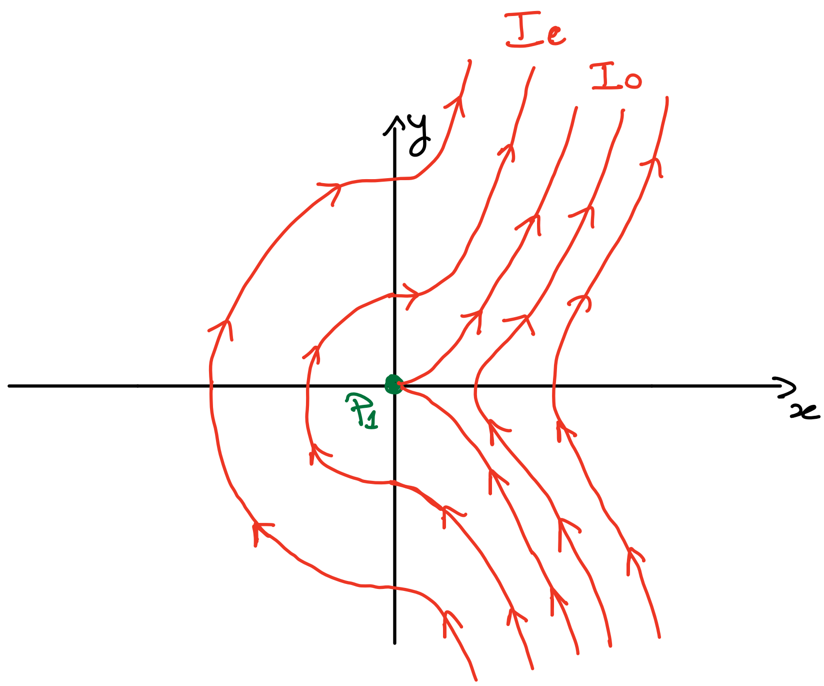
Quindi gli insiemi di livello $I_c = \{H(x,y) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, sono insiemi invarianti. In particolare:

- $c = 0$. $I_0 = \{y^2 = \frac{2}{3}x^3\} \subset \{x \geq 0\}$ e contiene il punto fisso P_1, e altre due orbite;
- $c \neq 0$. $I_c = \{y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 2c\} \subset \{x \geq (-3c)^{\frac{1}{3}}\}$ e contiene una sola orbita.

- Lo studio del segno del campo implica che

$$\dot{x} > 0 \iff y > 0 \qquad\qquad \dot{y} > 0 \iff x \neq 0$$
$$\dot{x} = 0 \iff y = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{y} = 0 \iff x = 0$$
$$\dot{x} < 0 \iff y < 0$$

- Il ritratto di fase è dunque



CASO $\mu > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\mu x + y \\ \dot{y} = x^2 + 3\mu y \end{cases}$$

- Punti fissi. Le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2\mu x + y = 0 \\ x^2 + 3\mu y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2\mu x \\ x^2 - 6\mu^2 x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2\mu x \\ x(x - 6\mu^2) = 0 \end{cases}$$

sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (6\mu^2, -12\mu^3)$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2\mu & 1 \\ 2x & 3\mu \end{pmatrix}$$

$JF(P_1) = \begin{pmatrix} 2\mu & 1 \\ 0 & 3\mu \end{pmatrix}$ ha autovalori $\{2\mu, 3\mu\} \subset \mathbb{R}^+$, quindi

P_1 è un punto fisso iperbolico di tipo nodo instabile

$JF(P_2) = \begin{pmatrix} 2\mu & 1 \\ 12\mu^2 & 3\mu \end{pmatrix}$ soddisfa $\det(JF(P_2)) = -6\mu^2 < 0$,

quindi P_2 è un punto fisso iperbolico di tipo sella. Inoltre gli autovalori di $JF(P_2)$ sono $\{-\mu, 6\mu\}$ e gli autovettori sono $v_{-\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\mu \end{pmatrix}$ e $w_{6\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\mu \end{pmatrix}$

- Studiamo nuovamente $\mathring{H}(x,y)$ per la funzione $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$.

$$\mathring{H}(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\left(2\mu x + y\right) + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\left(x^2 + 3\mu y\right) =$$

$$= -x^2(2\mu x + y) + y(x^2 + 3\mu y) = 3\mu y^2 - 2\mu x^3 = 6\mu\, H(x,y)$$

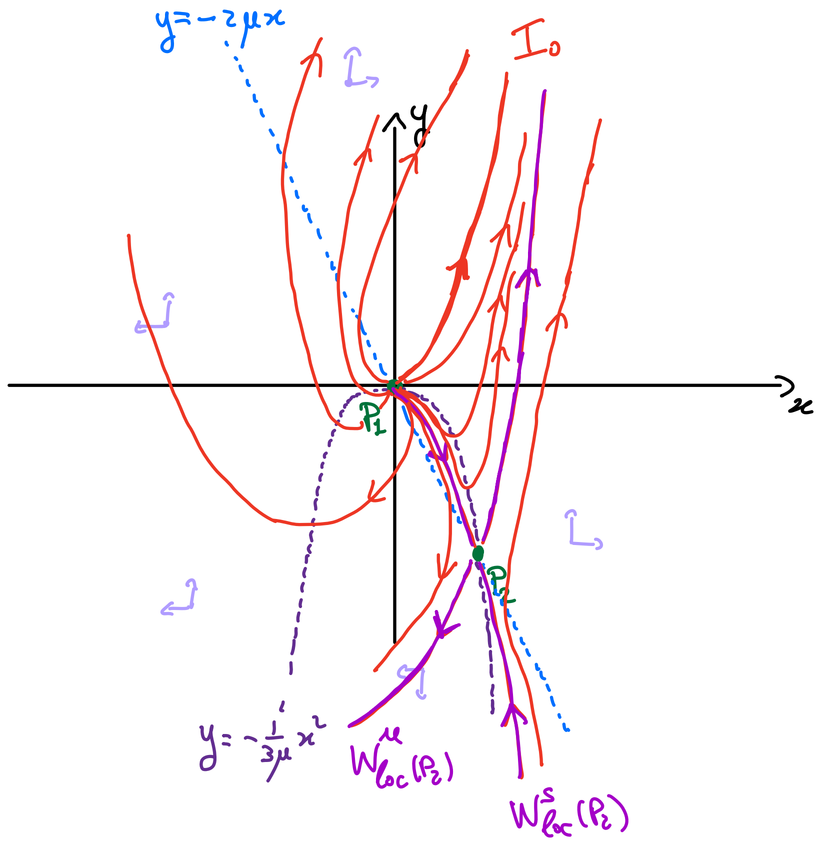
Quindi $I_c = \{H(x,y) = c\}$ è invariante per $c=0$. Inoltre I_0 contiene P_1 e P_2, essendo $H(0,0) = H(6\mu^2, -12\mu^3) = 0$.

- Orbite periodiche. Per la teoria dell'indice potrebbero esistere orbite periodiche racchiudenti solo P_1. Ma visto che per P_1 passa l'insieme invariante I_0, non possono esistere orbite periodiche

- Per il segno del campo si trova

$$\begin{aligned} \dot{x} > 0 &\iff y > -2\mu x \\ \dot{x} = 0 &\iff y = -2\mu x \\ \dot{x} < 0 &\iff y < -2\mu x \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \dot{y} > 0 &\iff y > -\tfrac{1}{3\mu}x^2 \\ \dot{y} = 0 &\iff y = -\tfrac{1}{3\mu}x^2 \\ \dot{y} < 0 &\iff y < -\tfrac{1}{3\mu}x^2 \end{aligned}$$

• Il ritratto di fase è dunque



CASO $\mu < 0$

• Punti fissi sono ancora $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (6\mu^2, -12\mu^3)$

$JF(P_1)$ ha autovalori $\{2\mu, 3\mu\} \subset \mathbb{R}^-$ e dunque P_1 è un punto fisso iperbolico di tipo nodo asintoticamente stabile

$JF(P_2)$ soddisfa $\det(JF(P_2)) = -6\mu^2 < 0$, e dunque P_2 è ancora punto fisso iperbolico di tipo sella. Gli autovalori di $JF(P_2)$ sono $\{6\mu, -\mu\}$ e gli autovettori sono $w_{6\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\mu \end{pmatrix}$ e $v_{-\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\mu \end{pmatrix}$

• La funzione $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3$ soddisfa ancora

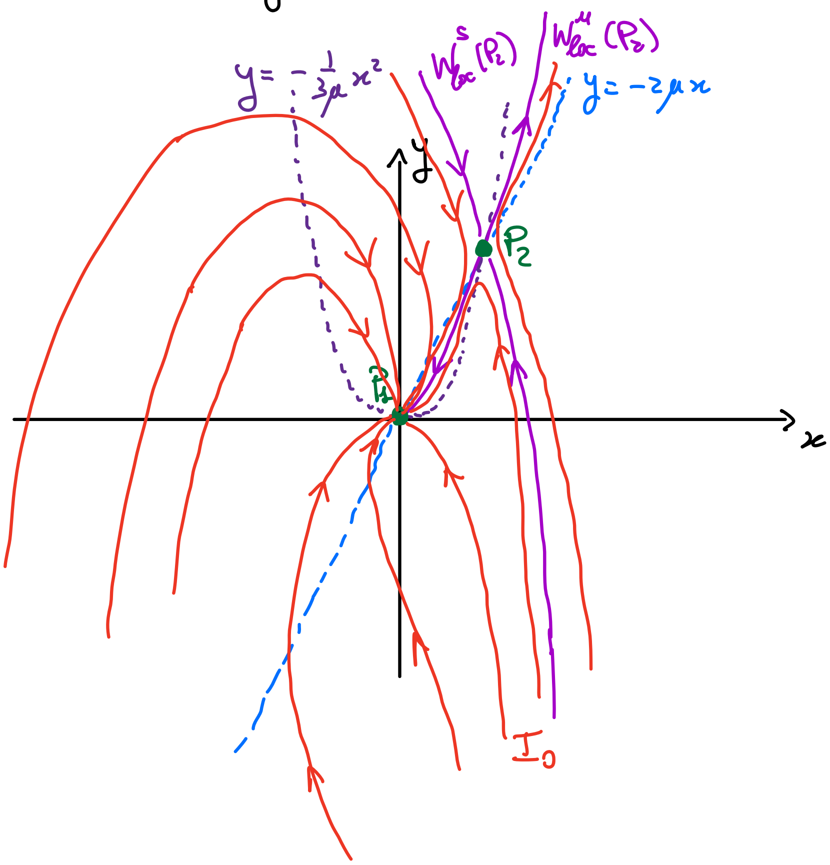
$\dot{H} = 6\mu H$, e dunque $I_0 = \{ y^2 = \frac{2}{3} x^3 \}$ è insieme invariante contenente P_1 e P_2.

- Orbite periodiche. Come nel caso $\mu > 0$, non possono esistere.

- Il segno del campo soddisfa

$$\dot{x} > 0 \iff y > -2\mu x \qquad\qquad \dot{y} > 0 \iff y > -\frac{1}{3\mu} x^2$$
$$\dot{x} = 0 \iff y = -2\mu x \qquad \text{e} \qquad \dot{y} = 0 \iff y = -\frac{1}{3\mu} x^2$$
$$\dot{x} < 0 \iff y < -2\mu x \qquad\qquad \dot{y} < 0 \iff y < -\frac{1}{3\mu} x^2$$

- Il ritratto di fase risulta essere



ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - (x+2y)(x^2+y^2) \\ \dot{y} = y + (2x-y)(x^2+y^2) \end{cases}$$

L'espressione del campo di vettori suggerisce di cambiare coordinate e usare le coordinate polari (ρ, ϑ) date da $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$.

Si trova

$$\dot\rho = \frac{1}{\rho}(x\dot x + y\dot y)\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta}} = \frac{1}{\rho}\Big[2x^2 - (x^2+2xy)(x^2+y^2) + y^2 + (2xy - y^2)(x^2+y^2)\Big]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[2x^2 + y^2 - (x^2+y^2)^2\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta}} = \rho + \rho\cos^2\vartheta - \rho^3$$

$$\dot\vartheta = \frac{1}{\rho^2}(x\dot y - y\dot x)\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta}} = \frac{1}{\rho^2}\Big[xy + (2x^2 - xy)(x^2+y^2) - 2xy + (xy + 2y^2)(x^2+y^2)\Big]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[-xy + 2(x^2+y^2)^2\right]\Big|_{\substack{x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta}} = 2\rho^2 - \sin\vartheta\cos\vartheta$$

Quindi studiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot\rho = \rho(1 + \cos^2\vartheta - \rho^2) \\ \dot\vartheta = 2\rho^2 - \sin\vartheta\cos\vartheta \end{cases}$$

- Punti fissi. Dal sistema in (x,y) abbiamo che $P_1 = (0,0)$ è un punto fisso (corrisponde a $\dot\rho = 0$ per $\rho = 0$), e non ci sono altri punti fissi in quanto per $\rho > 0$ il sistema

$$\begin{cases} 1 + \cos^2\vartheta - \rho^2 = 0 \\ 2\rho^2 - \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 = 1 + \cos^2\vartheta \\ 2 + 2\cos^2\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni.

- Il segno del campo. Si trova che

$\dot{\rho} > 0 \iff 1 + \cos^2\vartheta - \rho^2 > 0$ quindi $\dot{\rho} > 0$ se $\rho < 1$ e $\forall \vartheta$,

e $\dot{\rho} < 0$ se $\rho > \sqrt{2}$ e $\forall \vartheta$.

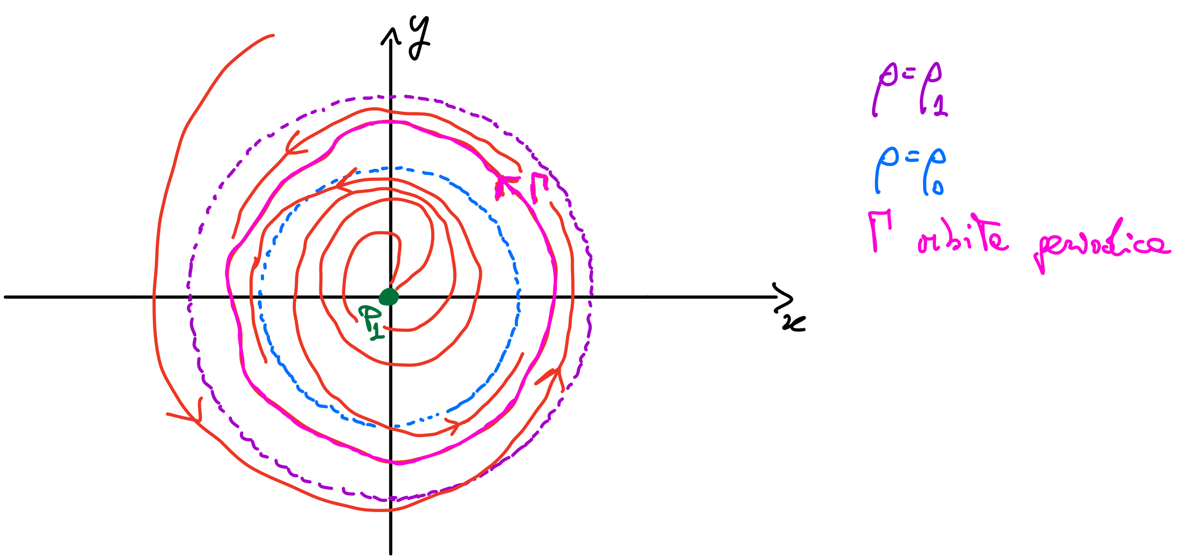
$\dot{\vartheta} > 0 \iff 2\rho^2 - \sin\vartheta \cos\vartheta > 0$ quindi $\dot{\vartheta} \geq 0$ se $\rho > \frac{1}{2}$ e $\forall \vartheta$, mentre se $\rho < \frac{1}{2}$ ci sono insiemi su cui $\dot{\vartheta} \leq 0$, insiemi inclusi in $\{0 \leq \vartheta \leq \pi/2\} \cup \{\pi \leq \vartheta \leq \frac{3}{2}\pi\}$.

- Applicando lo studio del segno del campo, si ottiene che possiamo applicare il Teorema di Poincaré - Bendixson all'insieme, in coordinate (x, y),

$$D = \{(x,y) \,/\, \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1\} \quad \forall \rho_0 < 1 \text{ e } \forall \rho_1 > \sqrt{2}.$$

Quindi esiste un'orbita periodica $\Gamma \subset D$.

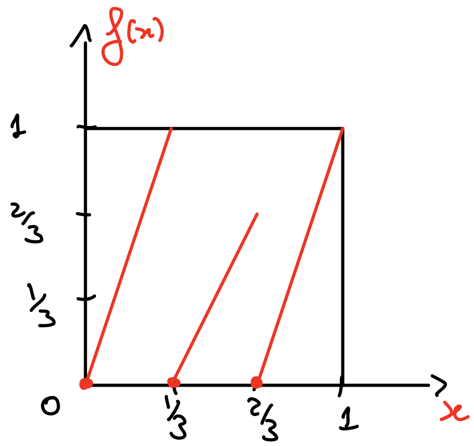
- Il ritratto di fase potrebbe quindi essere



$\boxed{\text{ESERCIZIO } 3}$

$$f : [0,1) \longrightarrow [0,1), \qquad f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ 2x - \frac{2}{3}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 3x - 2, & x \in [\frac{2}{3}, 1) \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ ha il seguente grafico



(i) Una buona scelta per una partizione di $[0,1)$ per la costruzione di un subshift di tipo finito σ coniugato ad f è data da

$$J_0 = [0, \tfrac{1}{3}), \quad J_1 = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), \quad J_2 = [\tfrac{2}{3}, 1)$$

Costruiamo quindi $\sigma : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ la cui matrice di transizione $A_\sigma = (a_{ij})$, $i,j \in \{0,1,2\}$ è data da

$$a_{ij} \in \{0,1\} \quad e \quad a_{ij} = 1 \iff J_i \cap f^{-1}(J_j) \neq \emptyset .$$

Si trova quindi

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Osserviamo innanzitutto che

$$A_\sigma^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ ha tutti gli elementi strettamente positivi,

quindi $(\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ e $([0,1), f)$ sono topologicamente mixing.

Per il calcolo dei punti fissi di f^n, $n \geq 1$, possiamo usare la traccia di A_σ^n.

La matrice A_σ ha polinomio caratteristico

$$p(t) = \det(tI - A) = t(t^2 - 3t + 1)$$

e quindi ha autovalori $\left\{0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$, ne segue che

$$tr(A_\sigma^n) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Facendo attenzione al fatto che $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ e f è definita su $[0,1)$, dobbiamo considerare due punti fissi in meno. Quindi

$$\#\{x : f^n(x) = x\} = tr(A_\sigma^n) - 2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2, \quad \forall n \geq 1$$

(iii) La funzione $\zeta_A(z)$ è data da

$$\zeta_A(z) = \frac{1}{\det(I - zA)} = \frac{1}{\det\left((zI)\cdot\left(\frac{1}{z}I - A\right)\right)} = \frac{1}{z^3 \det\left(\frac{1}{z}I - A\right)} =$$

$$= \frac{1}{z^3\, p\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^3\left[\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} + 1\right)\right]} = \frac{1}{1 - 3z + z^2}$$