Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 10-02-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche quelli della brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (15 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \exp\Big(y \log x\Big)$$

i) determinare il dominio;

ii) trovare tutti i punti critici liberi;

iii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\big\}\,;$$

iv*) trovare estremo inferiore e superiore di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x \le 2,\ \frac{1}{2} \le y \le 1\right\}.$$

(*Suggerimento: pensare a un'estensione continua della f che permette di rendere D compatto.*)

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare

$$\iint_\Omega \cos x \, dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le \pi,\ \frac{1}{\sin x} \le y \le 2\right\}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la curva

$$\gamma(t) = \left(2t,\ \frac{2}{1+t^2}\right), \qquad t \in [-1,1]$$

i) dire se è una curva regolare;

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno Γ della curva nel punto $P = \big(1,\ \frac{8}{5}\big)$;

iii) calcolare l'area dell'insieme U delimitato dal sostegno Γ, dalle rette $x = 2$ e $x = -2$, e dall'asse delle ascisse. (*Suggerimento: pensare al Teorema del Rotore e alla Formula dell'Area.*)

Svolgimento

Esercizio 1. (15 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \exp\Big(y \log x\Big)$$

i) determinare il dominio;

La funzione esponenziale è definita su tutto $\mathbb{R}$, mentre il logaritmo è definito se l'argomento è positivo. Il dominio di f è quindi l'insieme

$$\text{Dominio} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0\Big\}.$$

ii) trovare tutti i punti critici liberi;

Bisogna trovare in punti nel dominio che annullano il gradiente. Si trova

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{(y \log x)}\frac{y}{x} \\ e^{(y \log x)}\log x \end{pmatrix}$$

e quindi ponendo $\nabla f = 0$ si ottiene come unica soluzione il punto $P = (1,0)$.

iii) trovare massimo e minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 1\Big\};$$

La funzione f è continua su D che è un insieme compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo di f ristretta a D.

Dobbiamo prendere in considerazione i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a D, sui punti critici vincolati al bordo di D, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

Non ci sono punti critici liberi interni a D.

Per studiare i punti critici vincolati al bordo di D, dividiamo il bordo in quattro parti e usiamo le parametrizzazioni

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, \ 0) \qquad t \in [1,2] \\ \gamma_2(t) &= (2, \ t) \qquad t \in [0,1] \\ \gamma_3(t) &= (t, \ 1) \qquad t \in [1,2] \\ \gamma_4(t) &= (1, \ t) \qquad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Sostituiamo in f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f(t,0) = 1 \qquad t \in [1,2] \\ g_2(t) &= f(2,t) = 2^t \qquad t \in [0,1] \\ g_3(t) &= f(t,1) = t \qquad t \in [1,2] \\ g_4(t) &= f(1,t) = 1 \qquad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Le funzioni g_1 e g_4 sono costanti, mentre g_2 e g_3 non hanno punti critici interni ai loro intervalli di definizione.

Gli spigoli del bordo sono i punti

$$Q_1 = (1,0), \ Q_2 = (2,0), \ Q_3 = (1,1), \ Q_4 = (2,1)$$

mentre non ci sono punti di non derivabilità della funzione.

Quindi dobbiamo confrontare i valori

$$f|_{\Gamma_1} = f|_{\Gamma_4} = 1, \;\; f(Q_1) = 1, \;\; f(Q_2) = 1, \;\; f(Q_3) = 1, \;\; f(Q_4) = 2$$

e concludiamo

$$\max_D f = 2, \quad \min_D f = 1$$

iv*) trovare estremo inferiore e superiore di f ristretta all'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < x \leq 2, \; \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\}.$$

(*Suggerimento: pensare a un'estensione continua della f che permette di rendere D compatto.*)

Non possiamo applicare il metodo per la ricerca di massimo e minimo su D perché l'insieme non è chiuso, quindi non è compatto. Però notiamo che possiamo estendere la funzione f alla chiusura di D

$$\overline{D} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq 2, \; \frac{1}{2} \leq y \leq 1\right\}$$

ponendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\Big(y \log x\Big) & (x, y) \in D \\ 0 & x = 0, \; \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

in modo che f sia continua su $\overline{D}$. Infatti f è continua su D, e per ogni punto della forma $(0, \bar{y})$ con $\frac{1}{2} \leq \bar{y} \leq 1$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,\bar{y})} f(x, y) = 0$$

come si dimostra con la disuguaglianza

$$0 \leq \exp\Big(y \log x\Big) \leq \sqrt{x}, \qquad \forall \; 0 < x < 1, \; \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$$

Possiamo quindi applicare di nuovo il Teorema di Weierstrass e ottenere esistenza di massimo e minimo per f ristretta a $\overline{D}$, che per continuità coincidono con estremo superiore e inferiore per f ristretta a D.

Ripetendo quindi il ragionamento del punto iii) per f ristretta a $\overline{D}$, si trova

$$\sup_D f = 2, \quad \inf_D f = 0$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare

$$\iint_\Omega \cos x \, dxdy \qquad \text{con} \qquad \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq \pi, \; \frac{1}{\sin x} \leq y \leq 2\right\}$$

L'insieme Ω su cui integrare la funzione $f(x, y) = \cos x$ è rappresentato nella figura 1 ed è dato da

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq \pi, \; \frac{1}{\sin x} \leq y \leq 2\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, \; \frac{1}{\sin x} \leq y \leq 2\right\}$$

come si evince dall'uguaglianza

$$\left\{x \in [0, \pi] \;:\; \frac{1}{\sin x} \leq 2\right\} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

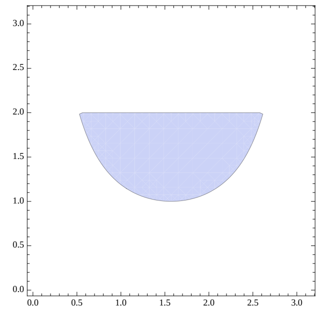

Figure 1: L'insieme Ω

Per l'integrale possiamo applicare la formula di integrazione su insiemi normali e scrivere

$$\iint_\Omega \cos x\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\int_{\frac{1}{\sin x}}^{2} \cos x\, dy \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \Big(2\cos x - \frac{\cos x}{\sin x} \Big)\, dx =$$

$$= \Big(-2\sin x - \log|\sin x| \Big)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = 0$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la curva

$$\gamma(t) = \left(2t,\ \frac{2}{1+t^2} \right), \qquad t \in [-1,1]$$

i) dire se è una curva regolare;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è una funzione di classe C^1 su $(-1,1)$, e il vettore velocità è dato da

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \forall\, t \in (-1,1)$$

Quindi la curva è regolare.

ii) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno Γ della curva nel punto $P = \big(1, \frac{8}{5}\big)$;

Scriviamo prima l'equazione parametrica che è della forma

$$\left\{ \left(1, \frac{8}{5}\right) + \lambda\, \gamma'(t_0) \ :\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

con $\gamma(t_0) = P$. Si trova $t_0 = \frac{1}{2}$, e quindi l'equazione parametrica è data da

$$\left\{ \left(1, \frac{8}{5}\right) + \lambda \left(2, -\frac{32}{25}\right) \ :\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Da

$$\begin{cases} x(\lambda) = 1 + 2\lambda \\ y(\lambda) = \frac{8}{5} - \frac{32}{25}\lambda \end{cases}$$

ricaviamo che l'equazione cartesiana è

$$16\,x + 25\,y = 56$$

iii) calcolare l'area dell'insieme U delimitato dal sostegno Γ, dalle rette $x = 2$ e $x = -2$, e dall'asse delle ascisse. (*Suggerimento: pensare al Teorema del Rotore e alla Formula dell'Area.*)

L'insieme U è rappresentato nella figura 2. Se consideriamo il campo di vettori con dominio $\mathbb{R}^2$

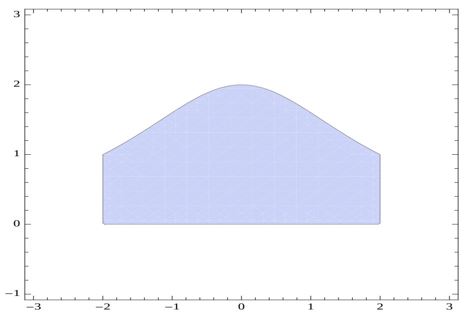

Figure 2: L'insieme U

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ha $rot(\mathbf{F})(x, y) = 1$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi su ogni insieme U aperto e connesso, e tale che ∂U sia il sostegno di una curva chiusa e di classe C^1 a tratti, se parametrizziamo ∂U in modo che sia orientata positivamente, possiamo scrivere che

$$Area(U) = \iint_U 1\, dxdy = \iint_U rot(\mathbf{F})\, dxdy = L(\mathbf{F}, \partial U)$$

Applichiamo la formula all'insieme U dato. Il bordo di U lo parametrizziamo ponendo $\partial U = \gamma(t) \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ con

$$\gamma_1(t) = (2, -t) \qquad t \in [-1, 0]$$
$$\gamma_2(t) = (-t,\ 0) \qquad t \in [-2, 2]$$
$$\gamma_3(t) = (2, t) \qquad t \in [0, 1]$$

che risulta una curva chiusa, di classe C^1 a tratti e orientata negativamente. Allora

$$Area(U) = L(\mathbf{F}, \partial U) = -L(\mathbf{F}, \gamma) - L(\mathbf{F}, \gamma_1) - L(\mathbf{F}, \gamma_2) - L(\mathbf{F}, \gamma_3).$$

Si trova

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \int_{-1}^{1} < \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) > \, dt = \int_{-1}^{1} -\frac{2}{1+t^2}\, 2\, dt = -4 \arctan t \Big|_{-1}^{1} = -2\pi$$

e poiché

$$< \mathbf{F}(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) > = < \mathbf{F}(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) > = < \mathbf{F}(\gamma_3(t)), \gamma_3'(t) > = 0$$

si ha

$$L(\mathbf{F}, \gamma_1) = L(\mathbf{F}, \gamma_2) = L(\mathbf{F}, \gamma_3) = 0.$$

Dunque

$$Area(U) = 2\pi.$$