**Calcolo delle Probabilità e Statistica**
**Corso di Laurea in Informatica**
**Compito del 09-06-2021**

**Esercizio 1. (8 punti)**

Nel gioco della tombola si fanno estrazioni successive da un sacchetto contenente 90 tessere numerate da 1 a 90, senza reinserimento. Indichiamo con $X$ e $Y$ rispettivamente il primo ed il secondo numero estratti.

a) Provare che le variabili $X$ e $Y$ sono equidistribuite e che non sono indipendenti.

b) Calcolare $E[X+Y]$.

c) Qual è la probabilità che, estraendo 10 numeri in successione (senza reinserimento), sia uscito il numero 20?

**Esercizio 2. (12 punti)**

Si consideri una variabile aleatoria $X$ avente densità

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(cioè $X$ ha densità Gamma(2,1) ), e sia $Y = X^{-1}$.

a) Dire se esiste finita $E[XY]$ ed, eventualmente, calcolare la covarianza $Cov(X, Y)$.

b) Quali momenti possiede la variabile aleatoria $Y$?

c) Scrivere esplicitamente la densità della variabile aleatoria $Y$.

d) Cercare una relazione tra i quantili delle variabili $X$ e $Y$.

**Esercizio 3. (10 punti)**

Consideriamo, per $0 < \theta < +\infty$ , la funzione

$$f_\theta(x) = \begin{cases} c_\theta\, x^{-(1+\theta)} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

a) Dopo aver calcolato la costante $c_\theta$ che rende la funzione sopra scritta una densità di probabilità, scrivere la funzione di ripartizione (o c.d.f.) di una v.a. che abbia la densità sopra scritta.

b) Dire per quali valori del parametro $\theta$ la variabile possiede i momenti primo e secondo.

c) Prendiamo ora un campione $X_1, \ldots, X_n$ di v.a. aventi la densità $f_\theta(.)$ : considerare la stima del parametro $\theta$ col *metodo dei momenti* e col *metodo della massima verosimiglianza*.

**Esercizio 3 per programma precedente. (10 punti)**

Consideriamo la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (parzialmente) identificata dalla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & ? \\ 1/4 & 1/4 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & 2/3 \end{pmatrix}$$

a) Completare la matrice di transizione inserendo le probabilità di transizione mancanti.

b) Calcolare la probabilità di trovarsi nello stato 3 al tempo 2, partendo dallo stato 1 al tempo 0. Cosa succede se invece al tempo 0 partiamo dallo stato 4?

c) Determinare tutte le distribuzioni invarianti.