Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 06-07-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2\,x^2\,y - 2\,x\,y^2 + x\,y$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\; x \leq 1\,,\; y \leq x+1\right\}\;.$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} \frac{x^3\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\; y \geq 0\,,\; x^2+y^2 \leq 1\,,\; y \geq 2x^2-1\right\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = e^z - \frac{1}{2}\,,\; z \leq 1\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,0\right)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq e^z - \frac{1}{2}\,,\; z \leq 1\,,\; y \geq 0\,,\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{e^z - \frac{1}{2}}\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = 2\,x^2\,y - 2\,x\,y^2 + x\,y$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} y\,(4x - 2y + 1) = 0 \\ x\,(2x - 4y + 1) = 0 \end{cases}$$

Studiando la prima equazione si ottiene che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y = 0 \\ x\,(2x - 4y + 1) = 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} 4x - 2y + 1 = 0 \\ x\,(2x - 4y + 1) = 0 \end{cases}$$

Nel primo sottosistema, sostituendo $y = 0$ nella seconda troviamo $x(2x+1) = 0$, quindi due soluzioni

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo sottosistema, ricaviamo dalla prima $2y = 4x + 1$, che sostituita nella seconda porta a $x(-6x - 1) = 0$. Otteniamo quindi altre due soluzioni

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzare i quattro punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x - 4y + 1 \\ 4x - 4y + 1 & -4x \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C_1) = Hf(0\,,\,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_1) = -1 < 0$, dunque C_1 è punto di sella;

$$Hf(C_2) = Hf\left(-\frac{1}{2}\,,\,0\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_2) = -1 < 0$, dunque C_2 è punto di sella;

$$Hf(C_3) = Hf\left(0\,,\,\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

si ha $\det Hf(C_3) = -1 < 0$, dunque C_3 è punto di sella;

$$Hf(C_4) = Hf\left(-\frac{1}{6}\,,\,\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\,,$$

si ha $\det Hf(C_4) = \frac{1}{3} > 0$ e $\operatorname{tr} Hf(C_4) = \frac{4}{3} > 0$, dunque C_4 è punto di minimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\, x \leq 1\,,\, y \leq x+1\right\}\,.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è il triangolo rappresentato nella figura 1.

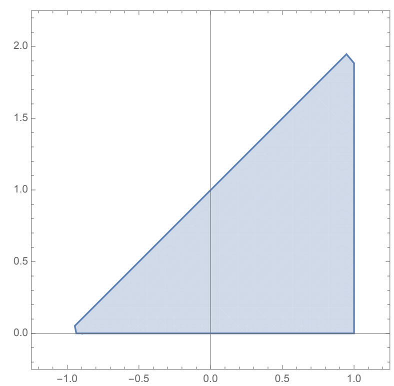

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è un polinomio e dunque non ha punto di non differenziabilità. I punti critici liberi sono stati trovati al punto (i), quelli interni a $\bar{\Omega}$ sono C_3 e C_4.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{x = 1\,,\, 0 \leq y \leq 2\}\,,$$

$$\Gamma_2 = \{y = x+1\,,\, -1 \leq x \leq 1\}\,,$$

$$\Gamma_3 = \{y = 0\,,\ -1 \le x \le 1\}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (1\,,\,t)\,, \qquad t \in [0\,,\,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = -2t^2 + 3t\,, \qquad t \in [0\,,\,2]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = -4t + 3$, dunque c'è un solo punto critico interno all'intervallo $[0\,,\,2]$ in $t_1 = \frac{3}{4}$, cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q_1 = \gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_2, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\,t+1)\,, \qquad t \in [-1\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = -t^2 - t\,, \qquad t \in [0\,,\,2]\ .$$

Risulta $g_2'(t) = -2t - 1$, dunque c'è un solo punto critico interno all'intervallo $[-1\,,\,1]$ in $t_2 = -\frac{1}{2}$, cui corrisponde il punto critico vincolato

$$Q_2 = \gamma_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\ .$$

Infine, per quanto riguarda Γ_3, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in [-1\,,\,1]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 0\,, \qquad t \in [-1\,,\,1]\ .$$

Essendo la funzione costante, tutti i punti di Γ_3 sono critici vincolati, e il valore della funzione in questi punti è uguale a quello sugli estremi S_1 ed S_3.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_3) = 0\,, \quad f(C_4) = -\frac{1}{108}\,, \quad f(S_1) = f(S_3) = 0\,, \quad f(S_2) = -2\,,$$

$$f(Q_1) = \frac{9}{8}\,, \quad f(Q_2) = \frac{1}{4}\,,$$

Dunque il massimo di f è $\frac{9}{8}$ e il minimo è -2.

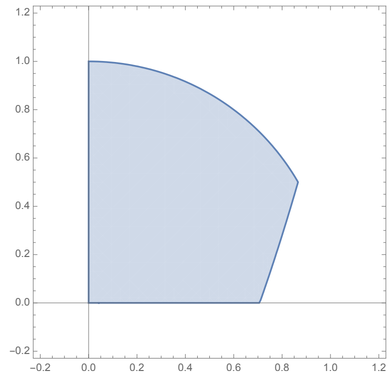

Figure 2: L'insieme Ω.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x^3\, y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 1\,,\, y \geq 2x^2-1\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x^3\, y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\, dx\, dy = \iint_S \cos^3\theta\, \sin\theta\, d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, \rho\sin\theta \geq 0\,,\, \rho^2 \leq 1\,,\, \rho\sin\theta \geq 2\rho^2\cos^2\theta - 1\big\}$$

Le prime tre condizioni ci dicono che

$$\rho \in [0,1] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

L'ultima condizione per S si riscrive, trattandola come una disequazione di secondo grado in ρ, come

$$\frac{\sin\theta - \sqrt{\sin^2\theta + 8\cos^2\theta}}{4\cos^2\theta} \leq \rho \leq \frac{\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 8\cos^2\theta}}{4\cos^2\theta}\,.$$

Osserviamo che la funzione a sinistra è negativa per $\theta \in \big[0\,,\, \frac{\pi}{2}\big]$, dunque mettendo insieme tutte le condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

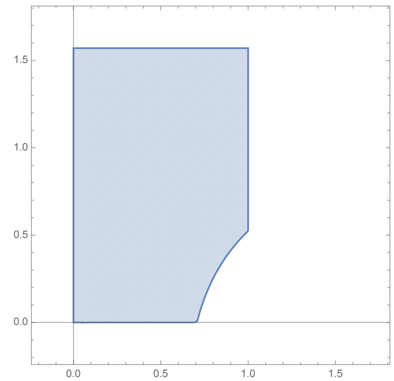

Figure 3: L'insieme S.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar{\theta} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{\sin\bar{\theta} + \sqrt{\sin^2\bar{\theta} + 8\cos^2\bar{\theta}}}{4\cos^2\bar{\theta}} = 1\,.$$

Risolvendo l'equazione, o osservando che $(\cos\bar{\theta}, \sin\bar{\theta})$ sono le coordinate del punto di intersezione tra $x^2 + y^2 = 1$ e $y = 2x^2 - 1$, ricaviamo che $\bar{\theta} = \frac{\pi}{6}$. Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici, usando $\sin^2\theta + 8\cos^2\theta = 1 + 7\cos^2\theta$,

$$S = \left\{(\rho,\theta)\,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}\,,\, 0 \le \rho \le \frac{\sin\theta + \sqrt{1+7\cos^2\theta}}{4\cos^2\theta}\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\,:\, \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\, 0 \le \rho \le 1\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x^3\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy = \iint_S \cos^3\theta\,\sin\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{\frac{\sin\theta+\sqrt{1+7\cos^2\theta}}{4\cos^2\theta}} \cos^3\theta\,\sin\theta\,d\rho\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \cos^3\theta\,\sin\theta\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^3\theta\,\sin\theta)\,\rho\Big|_0^{\frac{\sin\theta+\sqrt{1+7\cos^2\theta}}{4\cos^2\theta}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta\,\sin\theta)\,\rho\Big|_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos\theta\,\sin^2\theta + \cos\theta\,\sin\theta\,\sqrt{1+7\cos^2\theta}\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,\sin\theta\,d\theta =$$

$$= \left(\frac{1}{12}\sin^3\theta - \frac{1}{84}(1+7\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\right)_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4}{21}\sqrt{2} - \frac{118}{672} + \frac{9}{64} = \frac{4}{21}\sqrt{2} - \frac{47}{1344}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,:\, x^2 + y^2 = e^z - \frac{1}{2}\,,\, z \le 1\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,0\right)$;

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - e^z + \frac{1}{2}$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -e^z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) - z = 0\,.$$

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq e^z - \frac{1}{2}\,,\, z \leq 1\,,\, y \geq 0\,,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{e^z - \frac{1}{2}}\right\}$$

Si tratta del solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leq z \leq b\,,\, x^2 + y^2 \leq g^2(z)\right\}$$

dove $a = -\log 2$, $b = 1$ e $g(z) = \sqrt{e^z - \frac{1}{2}}$, osserviamo infatti che per $z \leq 1$ si ha $g(z) \geq 0$ per $z \in [-\log 2, 1]$, intersecato con l'insieme

$$\left\{y \geq 0\,,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,g(z)\right\}\,.$$

Calcoliamo il volume di V integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \int_{-\log 2}^{1} \left(\iint_{V_z} 1\,dxdy\right)\,dz$$

dove per ogni $z \in [-\log 2, 1]$

$$V_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq g^2(z)\,,\, y \geq 0\,,\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,g(z)\right\}\,.$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su V_z usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_z} 1\, dxdy = \iint_{S_z} \rho\, d\rho d\theta$$

dove

$$S_z = \left\{ (\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \rho^2 \le g^2(z)\,,\, \rho\sin\theta > 0\,,\, 0 \le \rho\cos\theta \le \frac{1}{2}\, g(z) \right\}\,.$$

Le prime tre condizioni ci dicono che per ogni $z \in [-\log 2, 1]$ fissato

$$\rho \in [0, g(z)] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

L'ultima condizione per S si riscrive come

$$\rho \le \frac{g(z)}{2\cos\theta}\,,$$

dove abbiamo usato che $\cos\theta > 0$ per $\theta \in \left[0\,,\, \frac{\pi}{2}\right]$. Dunque mettendo insieme tutte le condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 4 per $z = \frac{1}{2}$, con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

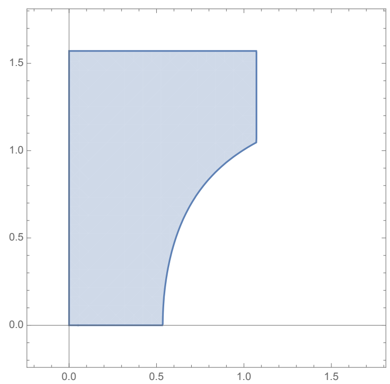

Figure 4: L'insieme $S_{\frac{1}{2}}$.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{g(z)}{2\cos\bar\theta} = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\bar\theta = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \bar\theta = \frac{\pi}{3}\,.$$

Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici

$$S_z = \left\{ (\rho,\theta) \,:\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\,,\, 0 \le \rho \le \frac{g(z)}{2\cos\theta} \right\} \bigcup \left\{ (\rho,\theta) \,:\, \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,,\, 0 \le \rho \le g(z) \right\}\,.$$

Quindi

$$\iint_{V_z} 1\, dxdy = \iint_{S_z} \rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{\frac{g(z)}{2\cos\theta}} \rho\, d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{g(z)} \rho\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{g^2(z)}{8\cos^2\theta}\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g^2(z)}{2}\, d\theta = \frac{g^2(z)}{8}\, \tan\frac{\pi}{3} + g^2(z)\,\frac{\pi}{12} = g^2(z)\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right).$$

Tornando allora al calcolo del volume di V troviamo, ponendo $g^2(z) = e^z - \frac{1}{2}$,

$$\text{Volume}(V) = \int_{-\log 2}^{1} \left(\iint_{V_z} 1\, dxdy\right) dz = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right) \int_{-\log 2}^{1} \left(e^z - \frac{1}{2}\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right) \left(e^z - \frac{1}{2}z\right)\Big|_{-\log 2}^{1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}\right) \left(e - 1 - \frac{1}{2}\log 2\right).$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 06-07-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x\,y^2 - 3\,x^2\,y - 2\,x\,y$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\ x \geq -1\,,\ x+y \leq 2\big\}\ .$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq 4\,,\ x \geq y^2-2\big\}$.

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = z^3+1\,,\ z \leq 2\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (1\,,\,1\,,\,1)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq z^3+1\,,\ z \leq 2\,,\ x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{z^3+1}\right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x\,y^2 - 3\,x^2\,y - 2\,x\,y$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} y\,(y - 6x - 2) = 0 \\ x\,(2y - 3x - 2) = 0 \end{cases}$$

Studiando la prima equazione si ottiene che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y = 0 \\ x\,(2y - 3x - 2) = 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} y - 6x - 2 = 0 \\ x\,(2y - 3x - 2) = 0 \end{cases}$$

Nel primo sottosistema, sostituendo $y = 0$ nella seconda troviamo $x(3x + 2) = 0$, quindi due soluzioni

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo sottosistema, ricaviamo dalla prima $y = 6x + 2$, che sostituita nella seconda porta a $x(9x + 2) = 0$. Otteniamo quindi altre due soluzioni

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_4 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzare i quattro punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6y & 2y - 6x - 2 \\ 2y - 6x - 2 & 2x \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C_1) = Hf(0\,,\,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_1) = -4 < 0$, dunque C_1 è punto di sella;

$$Hf(C_2) = Hf\left(-\frac{2}{3}\,,\,0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_2) = -4 < 0$, dunque C_2 è punto di sella;

$$Hf(C_3) = Hf\,(0\,,\,2) = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

si ha $\det Hf(C_3) = -4 < 0$, dunque C_3 è punto di sella;

$$Hf(C_4) = Hf\left(-\frac{2}{9}\,,\,\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} ,$$

si ha $\det Hf(C_4) = \frac{4}{3} > 0$ e $\operatorname{tr} Hf(C_4) = -\frac{40}{9} < 0$, dunque C_4 è punto di massimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x, y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0\,,\, x \geq -1\,,\, x + y \leq 2\right\} .$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è il triangolo rappresentato nella figura 5.

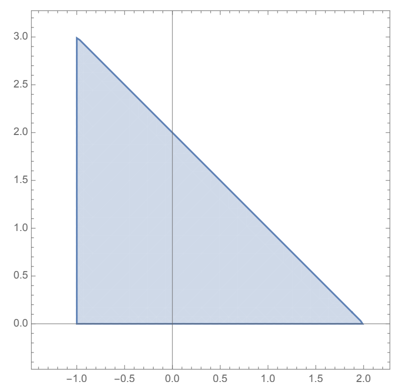

Figure 5: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è un polinomio e dunque non ha punto di non differenziabilità. I punti critici liberi sono stati trovati al punto (i), l'unico interno a $\bar{\Omega}$ è C_4.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{x = -1\,,\, 0 \leq y \leq 3\} \ ,$$

$$\Gamma_2 = \{y = 2 - x\,,\, -1 \leq x \leq 2\} \ ,$$

$$\Gamma_3 = \{y = 0\,,\ -1 \leq x \leq 2\}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (-1\,,\,t)\,, \qquad t \in [0\,,\,3]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = -t^2 - t\,, \qquad t \in [0\,,\,3]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = -2t - 1$, dunque non ci sono punti critici interni all'intervallo $[0\,,\,3]$, dunque non ci sono punti critici vincolati da considerare.

Per quanto riguarda Γ_2, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\,2 - t)\,, \qquad t \in [-1\,,\,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 4t^3 - 8t^2\,, \qquad t \in [-1\,,\,2]\ .$$

Risulta $g_2'(t) = 12t^2 - 16t$, dunque ci sono due punti critici interni all'intervallo $[-1\,,\,2]$ in $t_1 = 0$ e $t_2 = \frac{4}{3}$, cui corrispondono i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \gamma_1\left(\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\ .$$

Infine, per quanto riguarda Γ_3, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = (t\,,\,0)\,, \qquad t \in [-1\,,\,2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 0\,, \qquad t \in [-1\,,\,2]\ .$$

Essendo la funzione costante, tutti i punti di Γ_3 sono critici vincolati, e il valore della funzione in questi punti è uguale a quello sugli estremi S_1 ed S_3.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_4) = \frac{8}{81}\,, \quad f(S_1) = f(S_3) = 0\,, \quad f(S_2) = -12\,,$$

$$f(Q_1) = 0\,, \quad f(Q_2) = -\frac{128}{27}\,,$$

Dunque il massimo di f è $\frac{8}{81}$ e il minimo è -12.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy$$

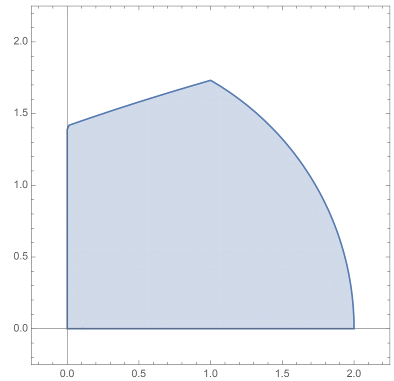

Figure 6: L'insieme Ω.

dove $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 4\,,\, x \geq y^2-2\big\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 6.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy = \iint_S \cos\theta\,\sin^3\theta\,d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, \rho\sin\theta \geq 0\,,\, \rho^2 \leq 4\,,\, \rho\cos\theta \geq \rho^2\sin^2\theta - 2\big\}$$

Le prime tre condizioni ci dicono che

$$\rho \in [0,2] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\,.$$

L'ultima condizione per S si riscrive, trattandola come una disequazione di secondo grado in ρ, come

$$\frac{\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta + 8\sin^2\theta}}{2\sin^2\theta} \leq \rho \leq \frac{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 8\sin^2\theta}}{2\sin^2\theta}\,.$$

Osserviamo che la funzione a sinistra è negativa per $\theta \in \big[0\,,\,\frac{\pi}{2}\big]$, dunque mettendo insieme tutte le condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 7 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{\cos\bar\theta + \sqrt{\cos^2\bar\theta + 8\sin^2\bar\theta}}{2\sin^2\bar\theta} = 2\,.$$

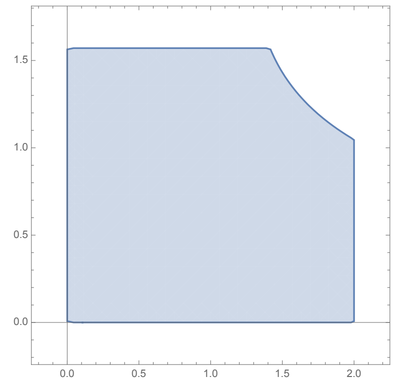

Figure 7: L'insieme S.

Risolvendo l'equazione, o osservando che $(2\cos\bar\theta, 2\sin\bar\theta)$ sono le coordinate del punto di intersezione tra $x^2+y^2=4$ e $x=y^2-2$, ricaviamo che $\bar\theta=\frac{\pi}{3}$. Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici, usando $\cos^2\theta+8\sin^2\theta=1+7\sin^2\theta$,

$$S=\Big\{(\rho,\theta)\,:\,0\le\theta\le\frac{\pi}{3}\,,\,0\le\rho\le 2\Big\}\quad\bigcup\quad\left\{(\rho,\theta)\,:\,\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\,,\,0\le\rho\le\frac{\cos\theta+\sqrt{1+7\sin^2\theta}}{2\sin^2\theta}\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy=\iint_S \cos\theta\,\sin^3\theta\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_0^2\cos\theta\,\sin^3\theta\,d\rho\Big)\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\cos\theta+\sqrt{1+7\sin^2\theta}}{2\sin^2\theta}}\cos\theta\,\sin^3\theta\,d\rho\right)\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos\theta\,\sin^3\theta)\,\rho\Big|_0^2\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\,\sin^3\theta)\,\rho\Big|_0^{\frac{\cos\theta+\sqrt{1+7\sin^2\theta}}{2\sin^2\theta}}\,d\theta=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,\sin^3\theta\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos^2\theta\,\sin\theta+\cos\theta\,\sin\theta\,\sqrt{1+7\sin^2\theta}\Big)\,d\theta=$$

$$=\Big(\frac{1}{2}\sin^4\theta\Big)_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big(-\frac{1}{6}\cos^3\theta+\frac{1}{42}\,(1+7\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\Big)_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{9}{32}+\frac{8}{21}\sqrt{2}+\frac{1}{48}-\frac{125}{336}=\frac{8}{21}\sqrt{2}-\frac{47}{672}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2=z^3+1\,,\,z\le 2\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P=(1\,,\,1\,,\,1)$*;*

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^3 - 1$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -3z^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\,(1\,,\,1\,,\,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$2\,(x-1) + 2\,(y-1) - 3(z-1) = 0\,.$$

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq z^3+1\,,\, z \leq 2\,,\, x \geq 0\,,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{z^3+1}\right\}$$

Si tratta del solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leq z \leq b\,,\, x^2+y^2 \leq g^2(z)\right\}$$

dove $a=-1$, $b=2$ e $g(z)=\sqrt{z^3+1}$, osserviamo infatti che per $z \leq 2$ si ha $g(z) \geq 0$ per $z \in [-1,1]$, intersecato con l'insieme

$$\left\{x \geq 0\,,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\,g(z)\right\}\,.$$

Calcoliamo il volume di V integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \int_{-1}^{2}\left(\iint_{V_z} 1\,dxdy\right)\,dz$$

dove per ogni $z \in [-1,2]$

$$V_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq g^2(z)\,,\, x \geq 0\,,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\,g(z)\right\}\,.$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su V_z usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times[0,2\pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_z} 1\,dxdy = \iint_{S_z} \rho\,d\rho d\theta$$

dove

$$S_z = \left\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times[0,2\pi] \,:\, \rho^2 \leq g^2(z)\,,\, \rho\cos\theta > 0\,,\, 0 \leq \rho\sin\theta \leq \frac{1}{2}\,g(z)\right\}\,.$$

Le prime tre condizioni ci dicono che per ogni $z \in [-1, 2]$ fissato

$$\rho \in [0, g(z)] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right] .$$

L'ultima condizione per S si riscrive come

$$\rho \leq \frac{g(z)}{2\sin\theta} ,$$

dove abbiamo usato che $\sin\theta > 0$ per $\theta \in \left[0\,,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Dunque mettendo insieme tutte le condizioni otteniamo l'insieme S rappresentato nella figura 8 per $z = 1$, con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate.

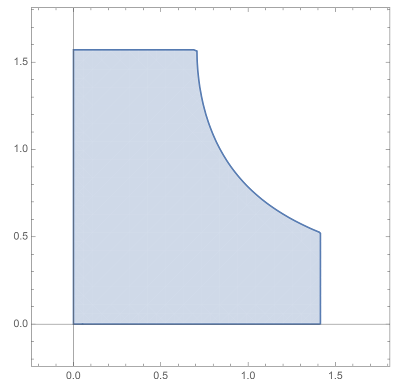

Figure 8: L'insieme S_1.

Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{g(z)}{2\sin\bar\theta} = g(z) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\bar\theta = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \bar\theta = \frac{\pi}{6} .$$

Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici

$$S_z = \left\{(\rho,\theta)\ :\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\,,\ 0 \leq \rho \leq g(z)\right\} \ \bigcup\ \left\{(\rho,\theta)\ :\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq \rho \leq \frac{g(z)}{2\sin\theta}\right\} .$$

Quindi

$$\iint_{V_z} 1\,dxdy = \iint_{S_z} \rho\,d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{g(z)} \rho\,d\rho\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{g(z)}{2\sin\theta}} \rho\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{g^2(z)}{2}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g^2(z)}{8\sin^2\theta}\,d\theta = g^2(z)\,\frac{\pi}{12} + \frac{g^2(z)}{8}\,\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = g^2(z)\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) .$$

Tornando allora al calcolo del volume di V troviamo, ponendo $g^2(z) = z^3 + 1$,

$$\text{Volume}(V) = \int_{-1}^{2} \left(\iint_{V_z} 1\,dxdy\right) dz = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \int_{-1}^{2} \left(z^3 + 1\right) dz =$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \left(\frac{1}{4}\,z^4 + z\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{27}{16}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) .$$