Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 05-06-2018

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2x^2 + \sqrt{x^4 + 4y^4}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, x^2 + y^2 \le 1 \right\} .$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0,2]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(t + 1 + \sin(\pi t^4) \, , \, t + 1 \Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (2\,,\,2)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{x^2+y^2} \\ 1 + \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^4 - 2z^3 = 0 \big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, 1 \Big)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ;

iii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{x}{x^2 + y^2} \, dxdydz$$

dove

$$V = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^4 - 2z^3 \le 0 \, , \, y \ge 1 \big\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = 2x^2 + \sqrt{x^4 + 4y^4}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come somma della funzione $g(x,y) = 2x^2$ e della composizione delle funzioni $h(t) = \sqrt{t}$ e $p(x,y) = x^4 + 4y^4$. Le funzioni g e p sono differenziabili su tutto il loro dominio naturale, e h è differenziabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dunque possiamo concludere dai teoremi di carattere generale che la funzione f è certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^4 + 4y^4 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Rimane da studiare la differenziabilità in $(0,0)$. Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 + \sqrt{t^4}}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{4t^4}}{t} = 0$$

Dobbiamo poi vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene che dobbiamo studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + \sqrt{x^4 + 4y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Provando a scrivere il limite come somma dei limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4+4y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

otteniamo che il primo termine tende a 0, usando $2x^2 \leq 2(x^2+y^2)$ per scrivere

$$0 \leq \left| \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

e applicando il Teorema del Confronto.

Per il secondo termine usiamo invece la disuguaglianza $\sqrt{a^2+b^2} \leq a + b$ con $a = x^2$ e $b = 2y^2$, da cui otteniamo

$$0 \leq \left| \frac{\sqrt{x^4+4y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$$

e quindi applicando il Teorema del Confronto troviamo che anche il secondo termine tende a 0.

Possiamo quindi giustificare le operazioni

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+\sqrt{x^4+4y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4+4y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e dunque la funzione f risulta essere differenziabile anche in $(0,0)$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\le \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, x^2+y^2\le 1\right\}.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

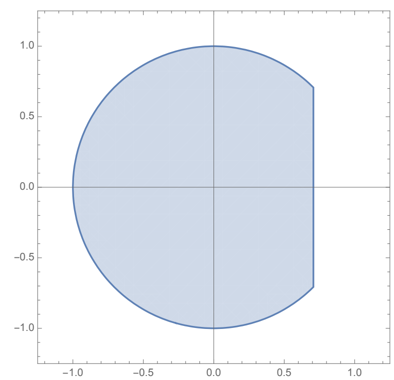

Figure 1: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Nel punto precedente abbiamo determinato che la funzione f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Nei punti $(x,y)\neq(0,0)$ possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+4y^4}} \\ \frac{8y^3}{\sqrt{x^4+4y^4}} \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che non ci sono punti critici liberi per $(x,y)\neq(0,0)$. Inoltre in $(0,0)$ abbiamo trovato che il gradiente si annulla, e quindi

$$C = (0,0) \in \mathring{\Omega}$$

è il primo punto da tenere in considerazione.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo per quanto visto nel punto i) dell'esercizio. Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x^2 + y^2 = 1 \, , \, x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, t \right) , \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + 4t^4} \, , \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] .$$

Risulta $g_1'(t) = \frac{16t^3}{1+16t^4}$, dunque si trova un punto critico per $t = 0$ che corrisponde al punto critico vincolato

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Consideriamo poi Γ_2 come insieme di livello della funzione differenziabile $G(x, y) = x^2 + y^2$. Il gradiente di G non si annulla su Γ_2, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} 4x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+4y^4}} = 2\lambda \, x \\ \frac{8y^3}{\sqrt{x^4+4y^4}} = 2\lambda \, y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Analizzando la seconda equazione il sistema diventa equivalente alla seguente unione di sistemi

$$\begin{cases} 4x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+4y^4}} = 2\lambda \, x \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \bigcup \begin{cases} 4x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+4y^4}} = 2\lambda \, x \\ y \neq 0 \\ \frac{4y^2}{\sqrt{x^4+4y^4}} = \lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Nel primo sottosistema si trova l'unica soluzione $(x, y, \lambda) = (-1, 0, 3)$, che corrisponde al punto critico vincolato

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Nel secondo sottosistema, poniamo $y^2 = 1 - x^2$ nella terza equazione e ricaviamo il valore di λ che sostituiamo nella prima equazione. La prima equazione diventa

$$4x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 4(1-x^2)^2}} = \frac{8x(1-x^2)}{\sqrt{x^4 + 4(1-x^2)^2}} \quad \Leftrightarrow \quad 2x\sqrt{x^4 + 4(1-x^2)^2} = 4x - 5x^3$$

Una soluzione è $x = 0$, da cui troviamo le soluzioni $(x, y, \lambda) = (0, 1, 2)$ e $(x, y, \lambda) = (0, -1, 2)$ del sistema iniziale, che corrispondono ai punti critici vincolati

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per $x \neq 0$, l'equazione si riduce a

$$2\sqrt{x^4 + 4(1-x^2)^2} = 4 - 5x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^4 + 16(1-x^2)^2 = (4-5x^2)^2 \\ 4 - 5x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2(8-5x^2) = 0 \\ 4 - 5x^2 \geq 0 \end{cases}$$

e non ci sono dunque altre soluzioni.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\,, \quad f(Q_1) = \frac{3}{2}\,, \quad f(Q_2) = 3\,, \quad f(Q_3) = f(Q_4) = 2\,.$$

Dunque il massimo di f è 3 e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t + 1 + \sin(\pi t^4)\,,\, t + 1\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (2\,,\,2)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (0, 2)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (2\,,\,2)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (0, 2)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} t_0 + 1 + \sin(\pi t_0^4) = 2 \\ t_0 + 1 = 2 \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $t_0 = 1$, e quindi la retta tangente al sostegno nel punto P è generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 + 4\pi t_0^3 \cos(\pi t_0^4) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4\pi \\ 1 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\pi - 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$(x-2) + (4\pi - 1)(y-2) = 0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{x^2+y^2} \\ 1 + \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio naturale è $X = \{x > 0\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Il dominio naturale X è semplicemente connesso, e dunque $\mathbf{F}$ è conservativo su X.

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva non è chiusa, essendo $\gamma(0) = (1,1) \neq \gamma(2) = (3,3)$, e il sostegno disegnato in figura 2 è contenuto interamente nel dominio del campo. Per il

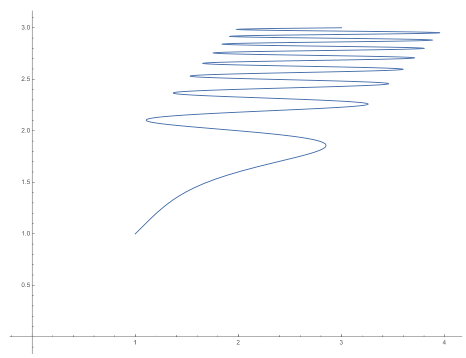

Figure 2: Il sostegno della curva (γ, I).

calcolo del lavoro abbiamo due possibilità. La prima è cercare un potenziale $f(x,y)$ del campo e scrivere

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = f(3,3) - f(1,1)\,.$$

Un potenziale è la funzione

$$f(x,y) = 2\sqrt{x} + y + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

da cui

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = 2\sqrt{3} + 3 + \frac{1}{2}\log(18) - 2 - 1 - \frac{1}{2}\log(2) = 2\sqrt{3} + \log 3\,.$$

La seconda è definire una curva $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, con sostegno contenuto in X e con punto iniziale in $(1,1)$ e punto finale in $(3,3)$, e usare che $L(\mathbf{F}, \gamma) = L(\mathbf{F}, \tilde{\gamma})$. Un esempio è la curva

$$\tilde{\gamma} : [1,3] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\,,\, t\Big)$$

per la quale si trova

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_1^3 < \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t} \\ 1 + \frac{1}{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > dt =$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} + 1 \right) dt = \left(2\sqrt{t} + t + \log t \right) \Big|_1^3 = 2\sqrt{3} + \log 3 \, .$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^4 - 2z^3 = 0 \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$*;*

Possiamo considerare Σ come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4 - 2z^3$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z^3 - 6z^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 2\,(z-1) = 0 \, .$$

ii) fare un disegno approssimativo di Σ*;*

Scrivendola nella forma

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 2z^3 - z^4 \right\}$$

la superficie si può interpretare come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione $g(z) = \sqrt{2z^3 - z^4}$, definita in $[0,2]$, dunque un disegno di Σ è in figura 3.

iii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{x}{x^2 + y^2} \, dxdydz$$

dove

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^4 - 2z^3 \le 0 \, , \, y \ge 1 \right\}$$

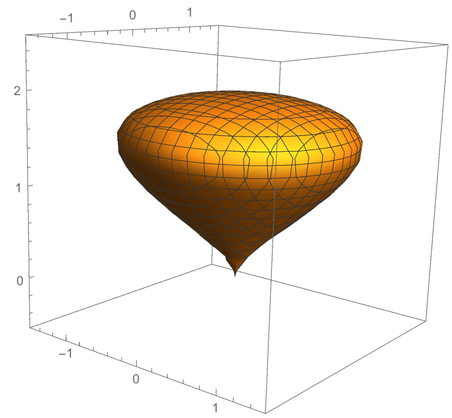

Figure 3: La superficie Σ.

L'insieme V è il solido di rotazione della forma

$$\tilde{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \le z \le b\,,\; x^2+y^2 \le g^2(z)\right\}$$

dove $a = 0$, $b = 2$ e $g(z) = \sqrt{2z^3 - z^4}$, intersecato con l'insieme $\{y \ge 1\}$.

Calcoliamo l'integrale triplo usando la formula di integrazione per strati, quindi

$$\iiint_V \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_0^2 \left(\iint_{V_z} \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy \right) dz$$

dove per ogni $z \in [0,2]$

$$V_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le g^2(z)\,,\; y \ge 1\right\} .$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su V_z usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\, \cos\theta \\ y = \rho\, \sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_z} \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy = \iint_{S_z} \cos\theta\, d\rho d\theta$$

dove

$$S_z = \left\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \rho^2 \le g^2(z)\,,\; \rho\sin\theta \ge 1\right\} .$$

Le due condizioni ci dicono che per ogni $z \in [0,2]$ fissato dobbiamo imporre

$$\rho \in [0, g(z)] \quad \text{e} \quad \theta \in [0,\pi] \,.$$

La seconda condizione per S ci dice inoltre che

$$\rho \ge \frac{1}{\sin\theta} \,.$$

Per ρ dobbiamo dunque mettere insieme le condizioni

$$\rho \leq g(z) \quad \text{e} \quad \rho \geq \frac{1}{\sin\theta}$$

per $\theta \in [0,\pi]$. La funzione $\frac{1}{\sin\theta}$ assume il suo minimo in $\theta = \frac{\pi}{2}$, in cui vale 1, quindi si ottiene che $S_z = \emptyset$ se $g(z) < 1$, $S_z = \left\{(1, \frac{\pi}{2})\right\}$ se $g(z) = 1$, e

$$S_z = \left\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \arcsin\frac{1}{g(z)} \leq \theta \leq \pi - \arcsin\frac{1}{g(z)}\,,\ \frac{1}{\sin\theta} \leq \rho \leq g(z)\right\} \quad \text{se } g(z) > 1\,.$$

Osservando che $g(z) \geq 1$ per $z \in [1,\bar{z}]$ dove $\bar{z}$ è l'unica soluzione reale dell'equazione $z^3 - z^2 - z - 1 = 0$, si conclude che

$$\iiint_V \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_1^{\bar{z}} \left(\int_{\arcsin\frac{1}{g(z)}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{g(z)}} \left(\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{g(z)} \cos\theta\,d\rho\right) d\theta\right) dz =$$

$$= \int_1^{\bar{z}} \left(\int_{\arcsin\frac{1}{g(z)}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{g(z)}} \rho\cos\theta\Big|_{\rho=\frac{1}{\sin\theta}}^{\rho=g(z)} d\theta\right) dz = \int_1^{\bar{z}} \left(\int_{\arcsin\frac{1}{g(z)}}^{\pi-\arcsin\frac{1}{g(z)}} \left(g(z)\cos\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) d\theta\right) dz =$$

$$= \int_1^{\bar{z}} \left(g(z)\sin\theta - \log(\sin\theta)\right)\Big|_{\theta=\arcsin\frac{1}{g(z)}}^{\theta=\pi-\arcsin\frac{1}{g(z)}} dz = \int_1^{\bar{z}} \left(1 + \log(g(z)) - 1 - \log(g(z))\right) dz = 0\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 05-06-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = y^2 + \sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} .$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0,2]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(t+2 \, , \, t+1+\cos(\pi t^4) \Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (3\,,\,1)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^3 - 4z = 0 \, , \, z \geq 0 \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \, , \, \sqrt{\frac{3}{2}} \, , \, 1 \right)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ;

iii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{y}{x^2+y^2} \, dxdydz$$

dove

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^3 - 4z \leq 0 \, , \, z \geq 0 \, , \, x \geq \sqrt{3} \right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = y^2 + \sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come somma della funzione $g(x,y) = y^2$ e della composizione delle funzioni $h(t) = \sqrt{t}$ e $p(x,y) = x^4 + \frac{1}{4}y^4$. Le funzioni g e p sono differenziabili su tutto il loro dominio naturale, e h è differenziabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dunque possiamo concludere dai teoremi di carattere generale che la funzione f è certamente differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^4 + \frac{1}{4}y^4 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Rimane da studiare la differenziabilità in $(0,0)$. Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^4}}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + \sqrt{\frac{1}{4}t^4}}{t} = 0$$

Dobbiamo poi vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene che dobbiamo studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 + \sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Provando a scrivere il limite come somma dei limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

otteniamo che il primo termine tende a 0, usando $y^2 \le x^2 + y^2$ per scrivere

$$0 \le \left| \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

e applicando il Teorema del Confronto.

Per il secondo termine usiamo invece la disuguaglianza $\sqrt{a^2+b^2} \le a + b$ con $a = x^2$ e $b = \frac{1}{2}y^2$, da cui otteniamo

$$0 \le \left| \frac{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \frac{x^2 + \frac{1}{2}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

e quindi applicando il Teorema del Confronto troviamo che anche il secondo termine tende a 0.

Possiamo quindi giustificare le operazioni

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 + \sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e dunque la funzione f risulta essere differenziabile anche in $(0,0)$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 4.

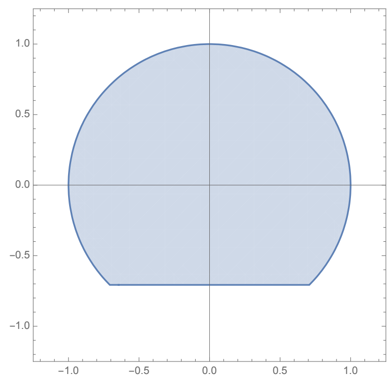

Figure 4: L'insieme Ω.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Nel punto precedente abbiamo determinato che la funzione f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. Nei punti $(x,y) \neq (0,0)$ possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+\frac{1}{4}y^4}} \\ 2y + \frac{y^3}{\sqrt{x^4+\frac{1}{4}y^4}} \end{pmatrix}$$

da cui si ricava che non ci sono punti critici liberi per $(x,y) \neq (0,0)$. Inoltre in $(0,0)$ abbiamo trovato che il gradiente si annulla, e quindi

$$C = (0,0) \in \overset{\circ}{\Omega}$$

è il primo punto da tenere in considerazione.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo per quanto visto nel punto i) dell'esercizio. Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ x^2 + y^2 = 1 \, , \, y \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(t \, , \, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) , \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{16} + t^4} \, , \qquad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] .$$

Risulta $g_1'(t) = \frac{8t^3}{1+16t^4}$, dunque si trova un punto critico per $t = 0$ che corrisponde al punto critico vincolato

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Consideriamo poi Γ_2 come insieme di livello della funzione differenziabile $G(x, y) = x^2 + y^2$. Il gradiente di G non si annulla su Γ_2, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \frac{4x^3}{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}} = 2\lambda \, x \\ 2y + \frac{y^3}{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}} = 2\lambda \, y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Analizzando la prima equazione il sistema diventa equivalente alla seguente unione di sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + \frac{y^3}{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}} = 2\lambda \, y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2x^2}{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}} = \lambda \\ 2y + \frac{y^3}{\sqrt{x^4 + \frac{1}{4}y^4}} = 2\lambda \, y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Nel primo sottosistema si trova l'unica soluzione $(x, y, \lambda) = (0, 1, 2)$, che corrisponde al punto critico vincolato

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo sottosistema, poniamo $x^2 = 1 - y^2$ nella seconda equazione e ricaviamo il valore di λ che sostituiamo nella terza equazione. La terza equazione diventa

$$2y + \frac{y^3}{\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{1}{4}y^4}} = \frac{4y(1-y^2)}{\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{1}{4}y^4}} \quad \Leftrightarrow \quad 2y\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{1}{4}y^4} = 4y - 5y^3$$

Una soluzione è $y = 0$, da cui troviamo le soluzioni $(x, y, \lambda) = (-1, 0, 2)$ e $(x, y, \lambda) = (1, 0, 2)$ del sistema iniziale, che corrispondono ai punti critici vincolati

$$Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $y \neq 0$, l'equazione si riduce a

$$2\sqrt{(1-y^2)^2 + \frac{1}{4}y^4} = 4-5y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4(1-y^2)^2 + y^4 = (4-5y^2)^2 \\ 4 - 5y^2 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5y^4 - 8y^2 + 3 = 0 \\ 4 - 5y^2 \geq 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. Nel sistema iniziale troviamo quindi la soluzione $(x, y, \lambda) = (\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{8}{5})$, scartando il caso $y = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ poiché $-\sqrt{\frac{3}{5}} < -\sqrt{\frac{1}{2}}$. Troviamo quindi il punto critico

$$Q_5 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C) = 0, \quad f(S_1) = f(S_2) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad f(Q_1) = \frac{3}{4}, \quad f(Q_2) = \frac{3}{2}, \quad f(Q_3) = f(Q_4) = 1, \quad f(Q_5) = \frac{11}{10}.$$

Dunque il massimo di f è $\frac{3}{2}$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, 2]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \Big(t + 2\,,\, t + 1 + \cos(\pi t^4)\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (3\,,\, 1)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (0, 2)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (3\,,\,1)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (0, 2)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} t_0 + 2 = 3 \\ t_0 + 1 + \cos(\pi t_0^4) = 1 \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $t_0 = 1$, e quindi la retta tangente al sostegno nel punto P è generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 4\pi t_0^3 \sin(\pi t_0^4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$(x - 3) - (y - 1) = 0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio naturale è $X = \{y > 0\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Il dominio naturale X è semplicemente connesso, e dunque $\mathbf{F}$ è conservativo su X.

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva non è chiusa, essendo $\gamma(0) = (2, 2) \neq \gamma(2) = (4, 4)$, e il sostegno disegnato in figura 5 è contenuto interamente nel dominio del campo. Per il calcolo del lavoro abbiamo due possibilità. La prima è cercare un potenziale $f(x, y)$ del campo e scrivere

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = f(4, 4) - f(2, 2)\,.$$

Un potenziale è la funzione

$$f(x, y) = x + 2\sqrt{y} + \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$$

da cui

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = 4 + 2\sqrt{4} + \frac{1}{2}\log(32) - 2 - 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log(8) = 6 - 2\sqrt{2} + \log 2\,.$$

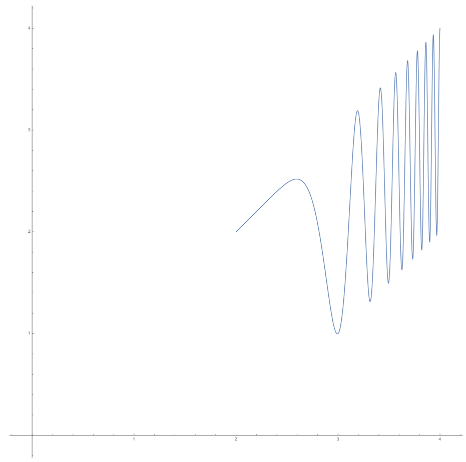

Figure 5: Il sostegno della curva (γ, I).

La seconda è definire una curva $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, con sostegno contenuto in X e con punto iniziale in $(2,2)$ e punto finale in $(4,4)$, e usare che $L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma})$. Un esempio è la curva

$$\tilde{\gamma} : [2,4] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t\,,\,t\Big)$$

per la quale si trova

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_2^4 < \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2t} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > dt =$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} + 1\right) dt = \Big(2\sqrt{t} + t + \log t\Big)\Big|_2^4 = 6 - 2\sqrt{2} + \log 2\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^3-4z = 0\,,\, z \geq 0\Big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P = \Big(\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\,1\Big)$;

Possiamo considerare Σ come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^3-4z$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 3z^2-4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,,\,1\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$\sqrt{6}\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\sqrt{6}\left(y-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-(z-1)=0\,.$$

ii) fare un disegno approssimativo di Σ;

Scrivendola nella forma

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2=4z-z^3\,,\,z\geq 0\right\}$$

la superficie si può interpretare come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z il grafico della funzione $g(z)=\sqrt{4z-z^3}$, che per $z\geq 0$ è definita in $[0,2]$, dunque un disegno di Σ è in figura 6.

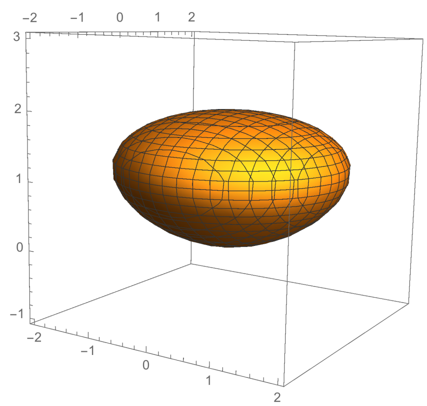

Figure 6: La superficie Σ.

iii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdydz$$

dove

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^3-4z\leq 0\,,\,z\geq 0\,,\,x\geq\sqrt{3}\right\}$$

L'insieme V è il solido di rotazione della forma

$$\tilde{V}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,a\leq z\leq b\,,\,x^2+y^2\leq g^2(z)\right\}$$

dove $a=0$, $b=2$ e $g(z)=\sqrt{4z-z^3}$, intersecato con l'insieme $\left\{x\geq\sqrt{3}\right\}$.

Calcoliamo l'integrale triplo usando la formula di integrazione per strati, quindi

$$\iiint_V \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdydz=\int_0^2\left(\iint_{V_z}\frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy\right)dz$$

dove per ogni $z\in[0,2]$

$$V_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2\leq g^2(z)\,,\,x\geq\sqrt{3}\right\}\,.$$

Svolgendo quindi prima l'integrale su V_z usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \qquad \text{con } (\rho,\theta) \in (0,+\infty) \times [-\pi,\pi]\,,$$

otteniamo

$$\iint_{V_z} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{S_z} \sin\theta\,d\rho d\theta$$

dove

$$S_z = \Big\{(\rho,\theta) \in (0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \,:\, \rho^2 \le g^2(z)\,,\, \rho\cos\theta \ge \sqrt{3}\Big\}\,.$$

Le due condizioni ci dicono che per ogni $z \in [0,2]$ fissato dobbiamo imporre

$$\rho \in [0, g(z)] \quad \text{e} \quad \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]\,.$$

La seconda condizione per S ci dice inoltre che

$$\rho \ge \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}\,.$$

Per ρ dobbiamo dunque mettere insieme le condizioni

$$\rho \le g(z) \quad \text{e} \quad \rho \ge \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

per $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La funzione $\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ assume il suo minimo in $\theta = 0$, in cui vale $\sqrt{3}$, quindi si ottiene che $S_z = \emptyset$ se $g(z) < \sqrt{3}$, $S_z = \big\{(\sqrt{3}, 0)\big\}$ se $g(z) = \sqrt{3}$, e

$$S_z = \left\{(\rho,\theta)\in(0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \,:\, -\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)} \le \theta \le \arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta} \le \rho \le g(z)\right\} \quad \text{se } g(z) > \sqrt{3}\,.$$

Osservando che $g(z) \ge \sqrt{3}$ per $z \in [1, \bar{z}]$ dove $\bar{z} = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$, si conclude che

$$\iiint_V \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_1^{\bar{z}} \left(\int_{-\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}}^{\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}} \left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{g(z)} \sin\theta\,d\rho \right) d\theta \right) dz =$$

$$= \int_1^{\bar{z}} \left(\int_{-\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}}^{\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}} \rho\sin\theta\Big|_{\rho=\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}^{\rho=g(z)} d\theta \right) dz = \int_1^{\bar{z}} \left(\int_{-\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}}^{\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}} \left(g(z)\sin\theta - \sqrt{3}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right) d\theta \right) dz =$$

$$= \int_1^{\bar{z}} \Big(-g(z)\cos\theta + \sqrt{3}\log(\cos\theta) \Big)\Big|_{\theta=-\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}}^{\theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{g(z)}} dz =$$

$$= \int_1^{\bar{z}} \left(-\sqrt{3} + \sqrt{3}\log\left(\frac{\sqrt{3}}{g(z)}\right) + \sqrt{3} - \sqrt{3}\log\left(\frac{\sqrt{3}}{g(z)}\right) \right) dz = 0\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito C del 05-06-2018

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2y^2 + \sqrt{4x^4 + y^4}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} .$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0,2]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(t+2 \, , \, t + 1 + \cos(\pi t^4) \Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (3\,,\,1)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^3 - 4z = 0 \, , \, z \geq 0 \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \, , \, \sqrt{\frac{3}{2}} \, , \, 1 \right)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ;

iii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{y}{x^2+y^2} \, dxdydz$$

dove

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^3 - 4z \leq 0 \, , \, z \geq 0 \, , \, x \geq \sqrt{3} \right\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. Vedi Esercizio 1 del compito A (basta scambiare x e y).

Esercizio 2. Vedi Esercizio 2 del compito B

Esercizio 3. Vedi Esercizio 3 del compito B

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito D del 05-06-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + y^4}$$

i) determinare in quali punti del dominio naturale è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0,2]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(t + 2 + \sin(\pi t^4)\,,\, t + 2\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (3\,,\,3)$;

ii) calcolare il lavoro lungo (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{x^2+y^2} \\ 1 + \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (12 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^4 - 2z^3 = 0\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,1\Big)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ;

iii) calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_V \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdydz$$

dove

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^4 - 2z^3 \leq 0\,,\, y \geq 1\big\}$$

Svolgimento

Esercizio 1. Vedi Esercizio 1 del compito B (basta scambiare x e y).

Esercizio 2. Vedi Esercizio 2 del compito A (basta sommare 1 alle due componenti della parametrizzazione)

Esercizio 3. Vedi Esercizio 3 del compito A