

Calcolo delle Probabilità e Statistica
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 05-02-2021

Esercizio 1. (8 punti)

Un ragazzo deve riempire un album di 10 figurine. Egli acquista le figurine in busta chiusa; ciascuna busta contiene una sola figurina, e si suppone che le figurine contenute nelle buste siano del tutto casuali ed indipendenti l'una dall'altra. Ovviamente la prima busta che acquista contiene una figurina che egli metterà sicuramente nell'album.

Sia X il numero di buste che deve acquistare, dopo la prima, per trovare la prima figurina diversa da quella già inserita nell'album; sia poi Y il numero di buste che deve acquistare successivamente per trovare la prima figurina diversa dalle prime due già inserite.

- a) Calcolare la densità discreta (o funzione di massa) della variabile aleatoria X . È una distribuzione nota?
- b) Calcolare la densità discreta della variabile aleatoria Y .
- c) Quanto vale $\mathbf{P}\{X + Y = 3\}$?

Esercizio 2. (12 punti)

Consideriamo la funzione così definita

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Dopo aver riconosciuto che F è la funzione di ripartizione di una variabile con densità, scrivere la densità e calcolare (se esistono) valore atteso, varianza e momento terzo di una variabile aleatoria che abbia quella densità.
- b) Prese due variabili indipendenti X ed Y aventi funzione di ripartizione eguale sopra scritta, calcolare $E[(X - Y)^2]$.
- c) Prese 80 v.a. X_1, \dots, X_{80} indipendenti, equidistribuite, aventi la c.d.f. sopra scritta, approssimare la probabilità $\mathbf{P}\{X_1 + \dots + X_{80} \leq 100\}$.

Esercizio 3. (10 punti)

La Piaggio vuole progettare un nuovo modello di Vespa elettrica, ma i costi della progettazione sono tali che questa operazione può essere conveniente solo se almeno un quarto dei potenziali clienti di scooter mostra di apprezzare il nuovo modello: viene condotta un'indagine di mercato su alcuni prototipi dalla quale risulta che su 192 persone intervistate 44 si sono mostrate favorevoli (notiamo che $44/192 = 0.229 \approx 0.23$ è inferiore a un quarto).

- a) Prendendo dunque 0.23 come stima della percentuale di gradimento, qual è la precisione di questa stima con un livello di fiducia del 90%?
- b) Il responsabile di quel progetto afferma che il risultato in realtà non è del tutto negativo e chiede di impostare il test dell'ipotesi $H_0) p \geq 0.25$ dove p è la percentuale di potenziali clienti favorevoli al nuovo modello: descrivere il test che è opportuno utilizzare e calcolare il relativo p -value.

Esercizio 3 per programma precedente. (10 punti)

Consideriamo la catena di Markov con stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ identificata dalla seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- a) Descrivere le probabilità invarianti.
- b) Qual è la probabilità di trovarsi nello stato 3 al tempo 2, partendo dallo stato 4 al tempo 0?