Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 02-07-2015 - A

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \cos\left[(2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right]$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 2 \, , \, y \geq -1\right\} \, .$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \geq 1 \, , \, \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}y^2 \leq 1 \, , \, x \geq 0 \, , \, y \leq x\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2 = 1-|z|\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+z \\ y^3+1 \\ \frac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \cos\left[(2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right]$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e si scrive come composizione delle funzioni $g(t) = \cos t$ e $h(x,y) = (2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$. Poiché g è differenziabile su tutto il suo dominio, e h è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, possiamo concludere che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e dobbiamo analizzare cosa succede in $(0,0)$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Iniziamo con la derivata parziale rispetto a x. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos[(2t^2)^{\frac{1}{3}}]-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\frac{1}{2}(2t^2)^{\frac{2}{3}} + o(|t|^{\frac{4}{3}})-1}{t} = 0\,,$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $\cos t = 1-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$ per $t \to 0$. Passiamo adesso alla derivata parziale rispetto a y. Si trova come sopra

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos[(t^2)^{\frac{1}{3}}]-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\frac{1}{2}(t^2)^{\frac{2}{3}} + o(|t|^{\frac{4}{3}})-1}{t} = 0\,.$$

Rimane adesso da verificare che valga

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left[(2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right]-1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\frac{1}{2}(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}} + o((2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}})-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-\frac{1}{2}(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per dimostrare che quest'ultimo limite è uguale a 0, usiamo la maggiorazione

$$0 \le \left|\frac{(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{(2x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2^{\frac{2}{3}}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}\,.$$

In conclusione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 2\,,\, y \ge -1\right\}\,.$$

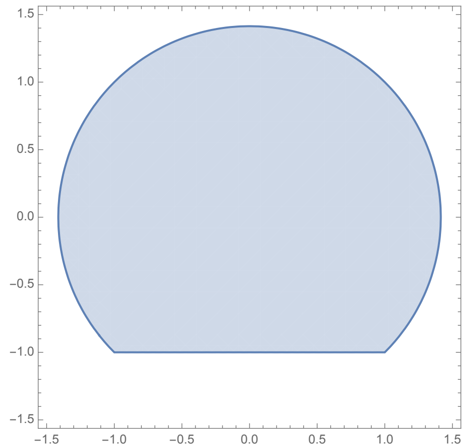

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque possiamo studiarne i punti critici liberi. In particolare abbiamo dimostrato che $P = (0,0)$ è critico libero, per trovarne altri cerchiamo soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{cases} -\frac{4x}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \sin\left[(2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = 0 \\ -\frac{2y}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \sin\left[(2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che in Ω vale $0 \leq (2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}} \leq (x^2+2)^{\frac{1}{3}} < 4^{\frac{1}{3}} < \pi$, quindi nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono altri punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{x^2+y^2 = 2\,,\, y \geq -1\right\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = -1\,,\, -1 \leq x \leq 1\} .$$

Per quanto riguarda Γ_1, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right] ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \cos\left[(2\cos^2 t + 2)^{\frac{1}{3}}\right], \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right].$$

Abbiamo $g_1'(t) = \frac{4\cos t\,\sin t}{3\,(2\cos^2 t+2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2\cos^2 t + 2)^{\frac{1}{3}}\right]$, e quindi i punti critici di g_1 nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$ sono $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$ e $t_2 = \pi$ (usiamo ancora che $2^{\frac{1}{3}} \leq (2\cos^2 t + 2)^{\frac{1}{3}} \leq 4^{\frac{1}{3}} < \pi$). Troviamo quindi i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \gamma_1(\pi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, per Γ_1 possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange scrivendo Γ_1 come insieme di livello della funzione $G_1(x, y) = x^2 + y^2$. Notiamo che tutti i punti di Γ_1 sono regolari, quindi dobbiamo cercare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -\frac{4x}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = 2\lambda x \\ -\frac{2y}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ -\frac{2y}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{2}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = \lambda \\ -\frac{2y}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema ricaviamo $y = \pm\sqrt{2}$, e la condizione $y \geq -1$ ci permette di scartare il caso $y = -\sqrt{2}$. Per cui ritroviamo il punto critico vincolato Q_2. Nel secondo sotto-sistema sostituiamo il valore di λ trovato nella seconda equazione nella terza equazione, per cui troviamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{2}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = \lambda \\ -\frac{2y}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = -2y\frac{2}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

Nella terza equazione possiamo semplificare il termine a denominatore e il termine $\sin\left[(2x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right]$, visto che non si annulla mai su Γ_1, e otteniamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{2}{3\,(2x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\,\sin\left[(2x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}\right] = \lambda \\ 2y = 4y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

per cui l'unica soluzione della terza equazione è $y = 0$, da cui ricaviamo $x = \pm\sqrt{2}$. Abbiamo così ritrovato i punti critici vincolati Q_1 e Q_3.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \cos\left[(2t^2 + 1)^{\frac{1}{3}}\right], \qquad t \in [-1, 1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = -\frac{4t}{3\,(2t^2+1)^{\frac{2}{3}}} \sin\left[(2t^2 + 1)^{\frac{1}{3}}\right]$ dunque l'unico punto critico è $t_0 = 0 \in (-1, 1)$ (usiamo ancora che $1 \leq (2t^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \leq 3^{\frac{1}{3}} < \pi$ nell'intervallo $[-1, 1]$). Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_4 = \gamma_2\,(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 1\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \cos(3^{\frac{1}{3}})\,, \quad f(Q_1) = f(Q_3) = \cos(4^{\frac{1}{3}})$$

$$f(Q_2) = \cos(2^{\frac{1}{3}})\,, \quad f(Q_4) = \cos(1)\,.$$

Tutti gli argomenti del coseno da considerare si trovano nell'intervallo $[0, \pi]$, e in quest'intervallo la funzione coseno è descrescente, quindi il massimo di f è 1, e il minimo di f è $\cos(4^{\frac{1}{3}})$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\; dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \geq 1\,,\, \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}y^2 \leq 1\,,\, x \geq 0\,,\, y \leq x\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\; dx\, dy = \iint_S \rho\, \cos\theta\; d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, \rho^2 \geq 1\,,\, \frac{1}{4}\rho^2\cos^2\theta + \frac{5}{4}\rho^2\sin^2\theta \leq 1\,,\, \rho\cos\theta \geq 0\,,\, \rho\sin\theta \leq \rho\cos\theta\right\}$$

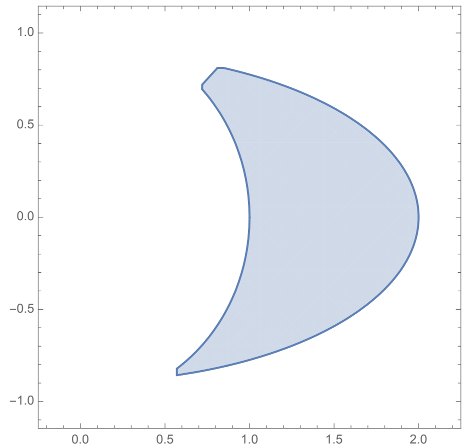

Figure 2: L'insieme Ω.

La prima, la terza e la quarta condizione ci dicono che

$$\rho \geq 1 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] ,$$

mentre la seconda condizione si riscrive come

$$\frac{1}{4}\rho^2 + \rho^2 \sin^2\theta \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \leq \left(\frac{4}{1+4\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Siamo quindi arrivati a

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\,, \rho \geq 1\,,\; \rho \leq \left(\frac{4}{1+4\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

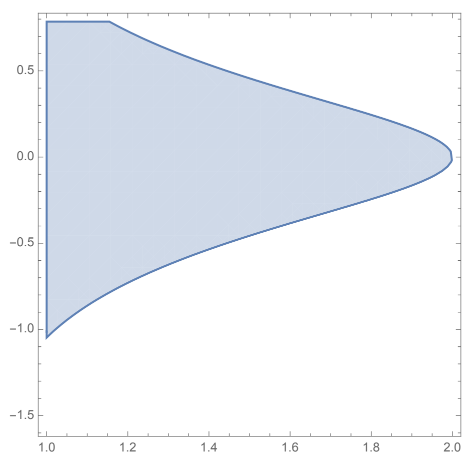

Figure 3: L'insieme S.

L'insieme S è rappresentato nella figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ tale che

$$\frac{4}{1+4\sin^2\bar\theta} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\bar\theta = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \bar\theta = -\frac{\pi}{3},$$

e quindi

$$S = \left\{ (\rho,\theta) \,:\, -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 1 \le \rho \le \left(\frac{4}{1+4\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_S \rho\cos\theta\;d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^{\left(\frac{4}{1+4\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} \rho\cos\theta\;d\rho \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\cos\theta}{1+4\sin^2\theta} - \frac{1}{2}\cos\theta \right) d\theta =$$

$$= \left(\arctan(2\sin\theta) - \frac{1}{2}\sin\theta \right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \arctan\sqrt{2} + \arctan\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 1-|z|\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

Si tratta di una superficie di rotazione che si ottiene ruotando intorno all'asse z il grafico della funzione $g(t) = \sqrt{1-|t|}$. Dalla definizione di g si vede che i punti di Σ soddisfano $z \in [-1,1]$. Il grafico di g in $[-1,1]$ è rappresentato nella figura 4.

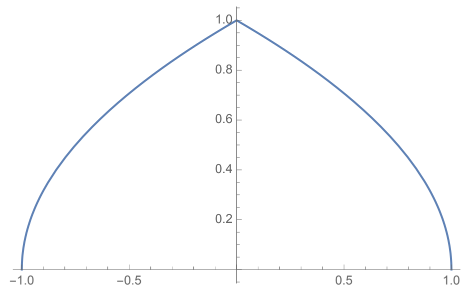

Figure 4: Il grafico di g.

Se adesso lo disegniamo sul piano (y,z) come grafico di $y = g(z)$ (ossia si inverte il ruolo degli assi rispetto alla figura 4) e lo facciamo ruotare intorno all'asse z, otteniamo il disegno di Σ in figura 5.

Una parametrizzazione globale di Σ si ottiene allora dalla forma standard per le superfici di rotazione, ossia

$$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3, \qquad \sigma(t,\theta) = (g(t)\,\cos\theta\,,\,g(t)\,\sin\theta\,,\,t)$$

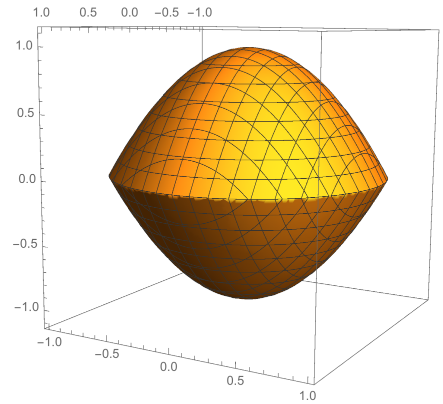

Figure 5: La superficie Σ.

con $g(t) = \sqrt{1 - |t|}$ e

$$D = \{(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \,:\, t \in [-1, 1]\} \;.$$

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + z \\ y^3 + 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è chiusa, regolare (a meno dell'insieme di area nulla dato dall'intersezione con il piano $\{z = 0\}$), e orientabile, e il campo $\mathbf{F}$ è differenziabile sul suo dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, z)\}$. Si vede dalla figura 5 che U, la parte interna alla superficie, è contenuta nel dominio del campo, possiamo quindi applicare il Teorema della Divergenza e ottenere

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz \,.$$

L'insieme U possiamo descriverlo per strati come

$$U = \{(x, y, z) \,:\, z \in [-1, 1]\,, (x, y) \in U_z\} \qquad \text{dove} \quad U_z = \left\{x^2 + y^2 \leq 1 - |z|\right\} \,,$$

e la divergenza del campo è

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2) \,.$$

Quindi

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{U_z} 3(x^2 + y^2) \, dxdy \right) dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(6\pi \int_0^{\sqrt{1-|z|}} \rho^3 \, d\rho \right) dz = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\pi \, (1-|z|)^2 \, dz = \frac{3}{2}\pi \left(z + \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_{-1}^{1} - 3\pi \int_{-1}^{1} |z| \, dz = 4\pi - 3\pi = \pi \,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 02-07-2015 - B

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - \sqrt{2x^2+y^2}$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 2\,,\, x \leq 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,,\, \frac{4}{5}x^2 + 4y^2 \geq 1\,,\, y \geq 0\,,\, y \geq x\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = \sin(\pi z)\,,\, 0 \leq z \leq 2\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{(x-1)^2+z^2} \\ (x^2+y^2)z \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - \sqrt{2x^2+y^2}$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e si scrive come composizione delle funzioni $g(t) = e^t - t$ e $h(x,y) = \sqrt{2x^2+y^2}$. Poiché g è differenziabile su tutto il suo dominio, e h è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, possiamo concludere che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e dobbiamo analizzare cosa succede in $(0,0)$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Iniziamo con la derivata parziale rispetto a x. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{|t|\sqrt{2}} - |t|\sqrt{2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1+|t|\sqrt{2}+t^2+o(t^2)-|t|\sqrt{2}-1}{t} = 0\,,$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$. Passiamo adesso alla derivata parziale rispetto a y. Si trova come sopra

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{|t|} - |t| - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1+|t|+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)-|t|-1}{t} = 0\,.$$

Rimane adesso da verificare che valga

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - \sqrt{2x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 + \sqrt{2x^2+y^2} + \frac{1}{2}(2x^2+y^2) + o((2x^2+y^2)) - \sqrt{2x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{2}(2x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per dimostrare che quest'ultimo limite è uguale a 0, usiamo la maggiorazione

$$0 \le \left|\frac{(2x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{(2x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

In conclusione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 2\,,\ x \le 1\right\}\,.$$

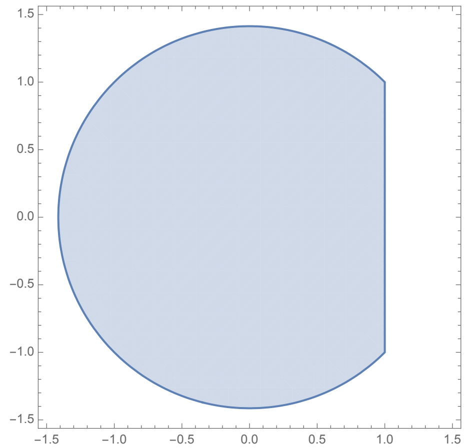

Figure 6: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 6.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque possiamo studiarne i punti critici liberi. In particolare abbiamo dimostrato che $P = (0, 0)$ è critico libero, per trovarne altri cerchiamo soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

$$\begin{cases} \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+y^2}} \left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1 \right) = 0 \\ \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}} \left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1 \right) = 0 \end{cases}$$

Nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono altri punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{ x^2 + y^2 = 2\,,\; x \leq 1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \{ x = 1\,,\; -1 \leq y \leq 1 \}\,.$$

Per quanto riguarda Γ_1, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\cos t \\ \sqrt{2}\,\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi \right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = e^{\sqrt{2\cos^2 t+2}} - \sqrt{2\cos^2 t + 2}\,, \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right].$$

Abbiamo $g_1'(t) = \frac{-4\cos t\,\sin t}{2\sqrt{2\cos^2 t+2}}\left(e^{\sqrt{2\cos^2 t+2}} - 1\right)$, e quindi i punti critici di g_1 nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right]$ sono $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $t_1 = \pi$ e $t_2 = \frac{3}{2}\pi$ (notiamo che $e^{\sqrt{2\cos^2 t+2}} - 1 > 0$). Troviamo quindi i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \gamma_1(\pi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \gamma_1\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, per Γ_1 possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange scrivendo Γ_1 come insieme di livello della funzione $G_1(x,y) = x^2 + y^2$. Notiamo che tutti i punti di Γ_1 sono regolari, quindi dobbiamo cercare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = 2\lambda x \\ \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = \lambda \\ \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema ricaviamo $y = \pm\sqrt{2}$, e abbiamo così ritrovato i punti critici vincolati Q_1 e Q_3. Nel secondo sotto-sistema sostituiamo il valore di λ trovato nella seconda equazione nella terza equazione, per cui troviamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = \lambda \\ \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = 2y\frac{2}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

Nella terza equazione possiamo semplificare il termine a denominatore e il termine $\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right)$, visto che non si annulla mai su Γ_1, e otteniamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{2}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{2x^2+y^2}} - 1\right) = \lambda \\ y = 2y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

per cui l'unica soluzione della terza equazione è $y = 0$, da cui ricaviamo $x = \pm\sqrt{2}$. La condizione $x \leq 1$ ci permette di scartare il caso $x = \sqrt{2}$. Per cui ritroviamo il punto critico vincolato Q_2.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{\sqrt{t^2+2}} - \sqrt{t^2+2}\,, \qquad t \in [-1, 1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+2}} \left(e^{\sqrt{t^2+2}} - 1 \right)$ dunque l'unico punto critico è $t_0 = 0 \in (-1, 1)$ (usiamo ancora che $e^{\sqrt{t^2+2}} - 1 > 0$). Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_4 = \gamma_2\,(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 1\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = e^{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\,, \quad f(Q_1) = f(Q_3) = f(Q_4) = e^{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,, \quad f(Q_2) = e^{\sqrt{4}} - \sqrt{4}\,.$$

La funzione $g(t) = e^t - t$ è crescente per $t > 0$, quindi il massimo di f è $e^{\sqrt{4}} - \sqrt{4}$, e il minimo di f è 1.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ \frac{4}{5}x^2 + 4y^2 \geq 1\,,\ y \geq 0\,,\ y \geq x\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 7.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \iint_S \rho\, \cos\theta \; d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, \rho^2 \leq 1\,,\ \frac{4}{5}\rho^2\cos^2\theta + 4\rho^2\sin^2\theta \geq 1\,,\ \rho\sin\theta \geq 0\,,\ \rho\sin\theta \geq \rho\cos\theta\right\}$$

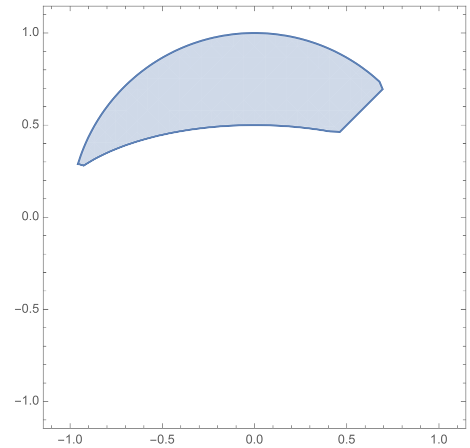

Figure 7: L'insieme Ω.

La prima, la terza e la quarta condizione ci dicono che

$$\rho \leq 1 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \,,$$

mentre la seconda condizione si riscrive come

$$\frac{4}{5}\rho^2 + \frac{16}{5}\rho^2 \sin^2\theta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \geq \left(\frac{5}{4 + 16\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Siamo quindi arrivati a

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \,, \rho \leq 1 \,,\, \rho \geq \left(\frac{5}{4 + 16\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

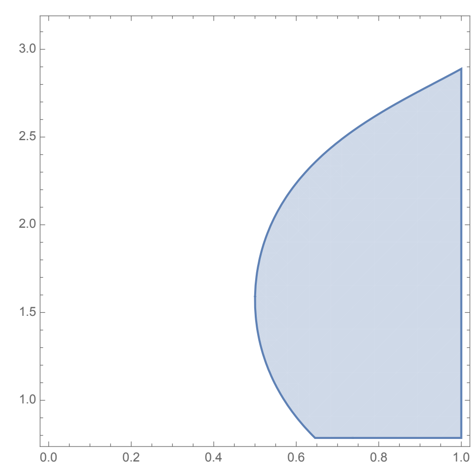

Figure 8: L'insieme S.

L'insieme S è rappresentato nella figura 8 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar{\theta} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tale che

$$\frac{5}{4 + 16 \sin^2 \bar{\theta}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 \bar{\theta} = \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \bar{\theta} = \frac{1}{4} \,,$$

e quindi

$$S = \left\{ (\rho, \theta) \,:\, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \bar{\theta} \,, \left(\frac{5}{4 + 16 \sin^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho \leq 1 \right\} .$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \iint_S \rho \cos \theta \; d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\bar{\theta}} \left(\int_{\left(\frac{5}{4+16\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}^{1} \rho \cos \theta \; d\rho \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\bar{\theta}} \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{5}{16} \, \frac{2 \cos \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} \right) d\theta =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{5}{16} \, \arctan(2 \sin \theta) \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\bar{\theta}} = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{16} \, \arctan \frac{1}{2} + \frac{5}{16} \, \arctan \sqrt{2} \,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = \sin(\pi z) \,,\, 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

Si tratta di una superficie di rotazione che si ottiene ruotando intorno all'asse z il grafico della funzione $g(t) = \sqrt{\sin(\pi t)}$. Dalla definizione di g si vede che i punti di Σ soddisfano $z \in [0, 1]$. Il grafico di g in $[0, 1]$ è rappresentato nella figura 9.

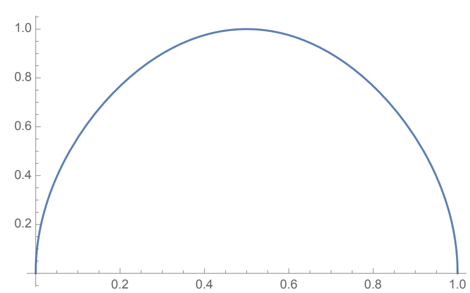

Figure 9: Il grafico di g.

Se adesso lo disegniamo sul piano (y, z) come grafico di $y = g(z)$ (ossia si inverte il ruolo degli assi rispetto alla figura 9) e lo facciamo ruotare intorno all'asse z, otteniamo il disegno di Σ in figura 10.

Una parametrizzazione globale di Σ si ottiene allora dalla forma standard per le superfici di rotazione, ossia

$$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \sigma(t, \theta) = (g(t) \, \cos \theta \,,\, g(t) \, \sin \theta \,,\, t)$$

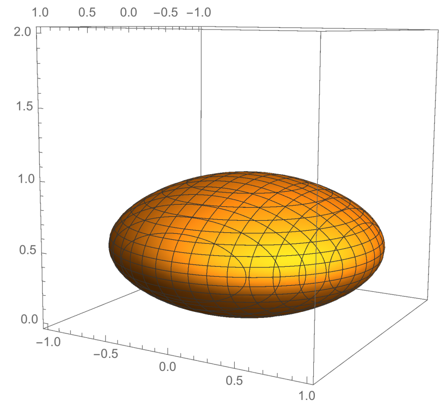

Figure 10: La superficie Σ.

con $g(t) = \sqrt{\sin(\pi t)}$ e
$$D = \{(t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \, : \, t \in [0,1]\} \, .$$

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{(x-1)^2+z^2} \\ (x^2+y^2)z \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è chiusa, regolare e orientabile, e il campo $\mathbf{F}$ è differenziabile sul suo dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1,y,0)\}$. Si vede dalla figura 10 che U, la parte interna alla superficie, è contenuta nel dominio del campo, possiamo quindi applicare il Teorema della Divergenza e ottenere
$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz \, .$$

L'insieme U possiamo descriverlo per strati come
$$U = \{(x,y,z) \, : \, z \in [0,1] \, , (x,y) \in U_z\} \qquad \text{dove} \quad U_z = \left\{x^2+y^2 \leq \sin(\pi z)\right\} \, ,$$

e la divergenza del campo è
$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = x^2+y^2 \, .$$

Quindi
$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{U_z} (x^2+y^2) \, dxdy \right) dz =$$
$$= \int_0^1 \left(2\pi \int_0^{\sqrt{\sin(\pi z)}} \rho^3 \, d\rho \right) dz = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin^2(\pi z) \, dz = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi z - \sin(\pi z) \, \cos(\pi z)}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \, .$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 02-07-2015 - C

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - \sqrt{x^2+2y^2}$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 2\,,\, y \geq -1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\,,\, 4x^2+\frac{4}{5}y^2 \geq 1\,,\, x \geq 0\,,\, y \geq -x\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 2 - e^{|z|}\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)z \\ z \\ \frac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - \sqrt{x^2+2y^2}$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e si scrive come composizione delle funzioni $g(t) = e^t - t$ e $h(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$. Poiché g è differenziabile su tutto il suo dominio, e h è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, possiamo concludere che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e dobbiamo analizzare cosa succede in $(0,0)$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Iniziamo con la derivata parziale rispetto a x. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{|t|} - |t| - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + |t| + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) - |t| - 1}{t} = 0\,.$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ per $t \to 0$. Passiamo adesso alla derivata parziale rispetto a y. Si trova come sopra

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{|t|\sqrt{2}} - |t|\sqrt{2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + |t|\sqrt{2} + t^2 + o(t^2) - |t|\sqrt{2} - 1}{t} = 0\,,$$

Rimane adesso da verificare che valga

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - \sqrt{x^2+2y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 + \sqrt{x^2+2y^2} + \frac{1}{2}(x^2+2y^2) + o((x^2+2y^2)) - \sqrt{x^2+2y^2} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{2}(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per dimostrare che quest'ultimo limite è uguale a 0, usiamo la maggiorazione

$$0 \le \Big|\frac{(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| \le \frac{(2x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

In conclusione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 2\,,\, y \ge -1\right\}\,.$$

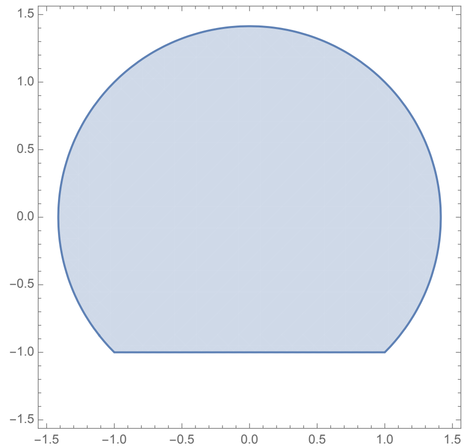

Figure 11: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 11.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque possiamo studiarne i punti critici liberi. In particolare abbiamo dimostrato che $P = (0,0)$ è critico libero, per trovarne altri cerchiamo soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}}-1\right)=0 \\ \frac{4y}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}}-1\right)=0 \end{cases}$$

Nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono altri punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1\right\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = -1\,,\ -1 \leq x \leq 1\}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = e^{\sqrt{2\sin^2 t+2}} - \sqrt{2\sin^2 t + 2}\,, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right].$$

Abbiamo $g_1'(t) = \frac{4\sin t\,\cos t}{2\sqrt{2\sin^2 t+2}}\left(e^{\sqrt{2\sin^2 t+2}} - 1\right)$, e quindi i punti critici di g_1 nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$ sono $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$ e $t_2 = \pi$ (notiamo che $e^{\sqrt{2\sin^2 t+2}} - 1 > 0$). Troviamo quindi i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \gamma_1(\pi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, per Γ_1 possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange scrivendo Γ_1 come insieme di livello della funzione $G_1(x, y) = x^2 + y^2$. Notiamo che tutti i punti di Γ_1 sono regolari, quindi dobbiamo cercare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = 2\lambda x \\ \frac{4y}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{4y}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = \lambda \\ \frac{4y}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema ricaviamo $y = \pm\sqrt{2}$, e la condizione $y \geq -1$ ci permette di scartare il caso $y = -\sqrt{2}$. Per cui ritroviamo il punto critico vincolato Q_2. Nel secondo sotto-sistema sostituiamo il valore di λ trovato nella seconda equazione nella terza equazione, per cui troviamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = \lambda \\ \frac{4y}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = 2y\frac{1}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

Nella terza equazione possiamo semplificare il termine a denominatore e il termine $\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right)$, visto che non si annulla mai su Γ_1, e otteniamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+2y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+2y^2}} - 1\right) = \lambda \\ 4y = 2y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ y \geq -1 \end{cases}$$

per cui l'unica soluzione della terza equazione è $y = 0$, da cui ricaviamo $x = \pm\sqrt{2}$. Abbiamo così ritrovato i punti critici vincolati Q_1 e Q_3.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = e^{\sqrt{t^2+2}} - \sqrt{t^2+2}\,, \qquad t \in [-1, 1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+2}}\left(e^{\sqrt{t^2+2}} - 1\right)$ dunque l'unico punto critico è $t_0 = 0 \in (-1, 1)$ (usiamo ancora che $e^{\sqrt{t^2+2}} - 1 > 0$). Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_4 = \gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 1\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = e^{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\,, \quad f(Q_1) = f(Q_3) = f(Q_4) = e^{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,, \quad f(Q_2) = e^{\sqrt{4}} - \sqrt{4}\,.$$

La funzione $g(t) = e^t - t$ è crescente per $t > 0$, quindi il massimo di f è $e^{\sqrt{4}} - \sqrt{4}$, e il minimo di f è 1.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 4x^2 + \frac{4}{5}y^2 \geq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq -x\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 12.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S \rho\sin\theta\; d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, \rho^2 \leq 1\,,\ 4\rho^2\cos^2\theta + \frac{4}{5}\rho^2\sin^2\theta \geq 1\,,\ \rho\cos\theta \geq 0\,,\ \rho\sin\theta \geq -\rho\cos\theta\right\}$$

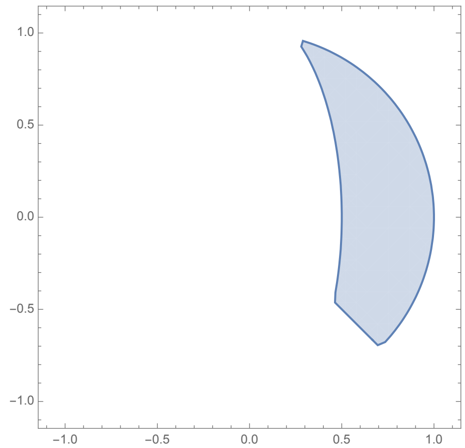

Figure 12: L'insieme Ω.

La prima, la terza e la quarta condizione ci dicono che

$$\rho \leq 1 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \,,$$

mentre la seconda condizione si riscrive come

$$\frac{4}{5}\rho^2 + \frac{16}{5}\rho^2 \cos^2\theta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \geq \left(\frac{5}{4 + 16\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Siamo quindi arrivati a

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \,, \rho \leq 1 \,,\, \rho \geq \left(\frac{5}{4 + 16\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

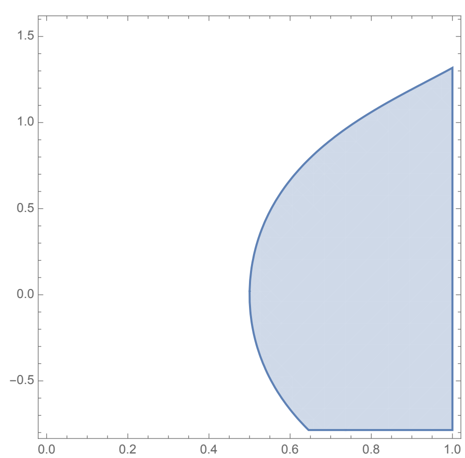

Figure 13: L'insieme S.

L'insieme S è rappresentato nella figura 13 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar{\theta} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{5}{4+16\cos^2\bar{\theta}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\bar{\theta} = \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\bar{\theta} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \sin\bar{\theta} = \frac{\sqrt{15}}{4}\,,$$

e quindi

$$S = \left\{(\rho,\theta)\ :\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \bar{\theta}\,,\ \left(\frac{5}{4+16\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \le \rho \le 1\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_S \rho\sin\theta\;d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\bar{\theta}} \left(\int_{\left(\frac{5}{4+16\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}^{1} \rho\sin\theta\;d\rho\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\bar{\theta}} \left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{5}{16}\,\frac{2\sin\theta}{1+4\cos^2\theta}\right) d\theta =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{5}{16}\,\arctan(2\cos\theta)\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\bar{\theta}} = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5}{16}\,\arctan\frac{1}{2} - \frac{5}{16}\,\arctan\sqrt{2}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 = 2-e^{|z|}\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

Si tratta di una superficie di rotazione che si ottiene ruotando intorno all'asse z il grafico della funzione $g(t) = \sqrt{2-e^{|t|}}$. Dalla definizione di g si vede che i punti di Σ soddisfano $z \in [-\log 2, \log 2]$. Il grafico di g in $[-\log 2, \log 2]$ è rappresentato nella figura 14.

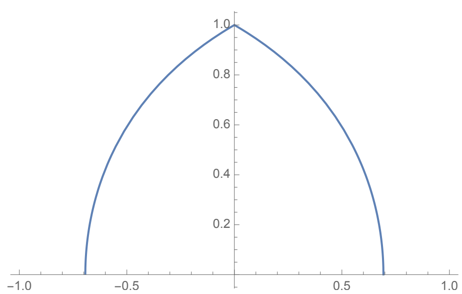

Figure 14: Il grafico di g.

Se adesso lo disegniamo sul piano (y,z) come grafico di $y = g(z)$ (ossia si inverte il ruolo degli assi rispetto alla figura 9) e lo facciamo ruotare intorno all'asse z, otteniamo il disegno di Σ in figura 15.

Una parametrizzazione globale di Σ si ottiene allora dalla forma standard per le superfici di rotazione, ossia

$$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(t,\theta) = (g(t)\,\cos\theta\,,\ g(t)\,\sin\theta\,,\ t)$$

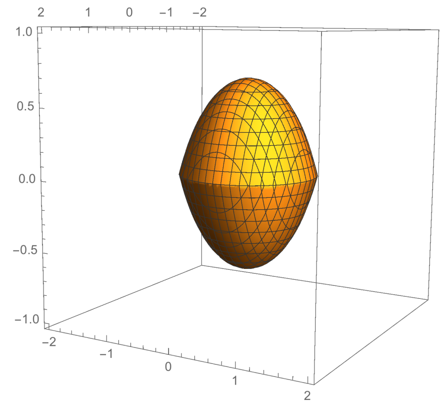

Figure 15: La superficie Σ.

con $g(t) = \sqrt{2 - e^{|t|}}$ e

$$D = \{(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \,:\, t \in [-\log 2, \log 2]\} \,.$$

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)z \\ z \\ \frac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è chiusa, regolare (a meno dell'insieme di area nulla dato dall'intersezione con il piano $\{z = 0\}$) e orientabile, e il campo $\mathbf{F}$ è differenziabile sul suo dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, z)\}$. Si vede dalla figura 15 che U, la parte interna alla superficie, è contenuta nel dominio del campo, possiamo quindi applicare il Teorema della Divergenza e ottenere

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz \,.$$

L'insieme U possiamo descriverlo per strati come

$$U = \{(x, y, z) \,:\, z \in [-\log 2, \log 2] \,, (x, y) \in U_z\} \qquad \text{dove} \quad U_z = \left\{ x^2 + y^2 \leq 2 - e^{|z|} \right\} \,,$$

e la divergenza del campo è

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z \,.$$

Quindi

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz = \int_{-\log 2}^{\log 2} \left(\iint_{U_z} z \, dxdy \right) dz =$$

$$= \int_{-\log 2}^{\log 2} \pi \, z \, (2 - e^{|z|}) \, dz = \pi z^2 \Big|_{-\log 2}^{\log 2} - \int_0^{\log 2} \pi \, z \, e^z \, dz - \int_{-\log 2}^{0} \pi \, z \, e^{-z} \, dz = 0 \,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 02-07-2015 - D

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \cos\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right]$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 2\,,\, x \le 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \ge 1\,,\, \frac{5}{4}x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\,,\, y \ge 0\,,\, y \ge -x\right\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = z^3 - z^5\,,\, z \ge 0\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(y-1)^2+z^2} \\ z(y-1) \\ x \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \cos\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right]$$

i) dire in quali punti del dominio è differenziabile;

La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e si scrive come composizione delle funzioni $g(t) = \cos t$ e $h(x,y) = (x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}$. Poiché g è differenziabile su tutto il suo dominio, e h è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, possiamo concludere che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e dobbiamo analizzare cosa succede in $(0,0)$.

Per studiare la differenziabilità di f nell'origine applichiamo la definizione. Controlliamo quindi se esistono innanzitutto le derivate parziali nell'origine. Iniziamo con la derivata parziale rispetto a x. Si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos[(t^2)^{\frac{2}{3}}]-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}(t^2)^{\frac{4}{3}}+o(|t|^{\frac{8}{3}})-1}{t} = 0\,,$$

dove abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $\cos t = 1-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$ per $t\to 0$. Passiamo adesso alla derivata parziale rispetto a y. Si trova come sopra

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos[(2t^2)^{\frac{2}{3}}]-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}(2t^2)^{\frac{4}{3}}+o(|t|^{\frac{8}{3}})-1}{t} = 0\,.$$

Rimane adesso da verificare che valga

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Si trova

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right]-1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\frac{1}{2}(x^2+2y^2)^{\frac{4}{3}}+o((x^2+2y^2)^{\frac{4}{3}})-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-\frac{1}{2}(x^2+2y^2)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per dimostrare che quest'ultimo limite è uguale a 0, usiamo la maggiorazione

$$0 \le \left|\frac{(x^2+2y^2)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{(2x^2+2y^2)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2^{\frac{4}{3}}\,(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}\,.$$

In conclusione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2\le 2\,,\,x\le 1\right\}\,.$$

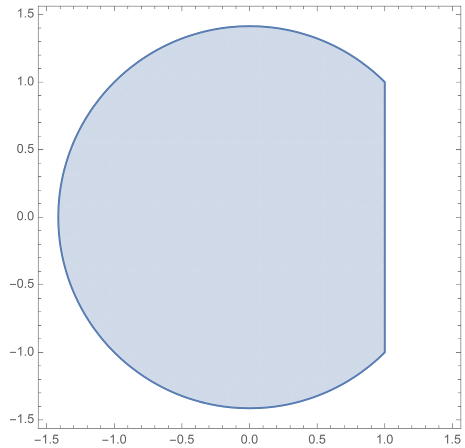

Figure 16: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 16.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$ ed eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque possiamo studiarne i punti critici liberi. In particolare abbiamo dimostrato che $P = (0,0)$ è critico libero, per trovarne altri cerchiamo soluzioni del sistema in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\begin{cases} -\frac{4x}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}} \, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = 0 \\ -\frac{8y}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}} \, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che in Ω vale $0 \leq (x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}} \leq (2+y^2)^{\frac{2}{3}} < 4^{\frac{2}{3}} < \pi$, quindi nell'insieme da considerare non ci sono soluzioni del sistema, e dunque non ci sono altri punti critici liberi.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il bordo lo dividiamo in due parti:

$$\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 2\,,\, x \leq 1\right\}$$

$$\Gamma_2 = \{x = 1\,,\, -1 \leq y \leq 1\}\ .$$

Per quanto riguarda Γ_1, possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,\cos t \\ \sqrt{2}\,\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right],$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \cos\left[(2\sin^2 t + 2)^{\frac{2}{3}}\right], \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right].$$

Abbiamo $g_1'(t) = \frac{-8\sin t\, \cos t}{3\,(2\sin^2 t+2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(2\sin^2 t+2)^{\frac{2}{3}}\right]$, e quindi i punti critici di g_1 nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right]$ sono $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $t_1 = \pi$ e $t_2 = \frac{3}{2}\pi$ (usiamo ancora che $2^{\frac{2}{3}} \le (2\sin^2 t + 2)^{\frac{2}{3}} \le 4^{\frac{2}{3}} < \pi$). Troviamo quindi i punti critici vincolati

$$Q_1 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \gamma_1(\pi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \gamma_1\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, per Γ_1 possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange scrivendo Γ_1 come insieme di livello della funzione $G_1(x,y) = x^2 + y^2$. Notiamo che tutti i punti di Γ_1 sono regolari, quindi dobbiamo cercare soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -\frac{4x}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = 2\lambda x \\ -\frac{8y}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ -\frac{8y}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{2}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = \lambda \\ -\frac{8y}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema ricaviamo $y = \pm\sqrt{2}$, e abbiamo così ritrovato i punti critici vincolati Q_1 e Q_3. Nel secondo sotto-sistema sostituiamo il valore di λ trovato nella seconda equazione nella terza equazione, per cui troviamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{2}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = \lambda \\ -\frac{8y}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = -2y\, \frac{2}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

Nella terza equazione possiamo semplificare il termine a denominatore e il termine $\sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right]$, visto che non si annulla mai su Γ_1, e otteniamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{2}{3\,(x^2+2y^2)^{\frac{1}{3}}}\, \sin\left[(x^2+2y^2)^{\frac{2}{3}}\right] = \lambda \\ 8y = 4y \\ x^2 + y^2 = 2\,,\ x \le 1 \end{cases}$$

per cui l'unica soluzione della terza equazione è $y = 0$, da cui ricaviamo $x = \pm\sqrt{2}$. La condizione $x \leq 1$ ci permette di scartare il caso $x = \sqrt{2}$. Per cui ritroviamo il punto critico vincolato Q_2.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \cos\left[(2t^2 + 1)^{\frac{2}{3}}\right], \qquad t \in [-1, 1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = -\frac{8t}{3\,(2t^2+1)^{\frac{1}{3}}} \sin\left[(2t^2 + 1)^{\frac{2}{3}}\right]$ dunque l'unico punto critico è $t_0 = 0 \in (-1, 1)$ (usiamo ancora che $1 \leq (2t^2 + 1)^{\frac{2}{3}} \leq 3^{\frac{2}{3}} < \pi$ nell'intervallo $[-1, 1]$). Troviamo quindi il punto critico vincolato

$$Q_4 = \gamma_2\,(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = 1\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \cos(3^{\frac{2}{3}})\,, \quad f(Q_1) = f(Q_3) = \cos(4^{\frac{2}{3}})$$

$$f(Q_2) = \cos(2^{\frac{2}{3}})\,, \quad f(Q_4) = \cos(1)\,.$$

Tutti gli argomenti del coseno da considerare si trovano nell'intervallo $[0, \pi]$, e in quest'intervallo la funzione coseno è descrescente, quindi il massimo di f è 1, e il minimo di f è $\cos(4^{\frac{2}{3}})$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\; dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \geq 1\,,\ \frac{5}{4}\,x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\,,\ y \geq 0\,,\ y \geq -x\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 17.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\; dx\, dy = \iint_S \rho\,\sin\theta\; d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, \rho^2 \geq 1\,,\ \frac{5}{4}\rho^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}\rho^2\sin^2\theta \leq 1\,,\ \rho\sin\theta \geq 0\,,\ \rho\sin\theta \geq -\rho\cos\theta\right\}$$

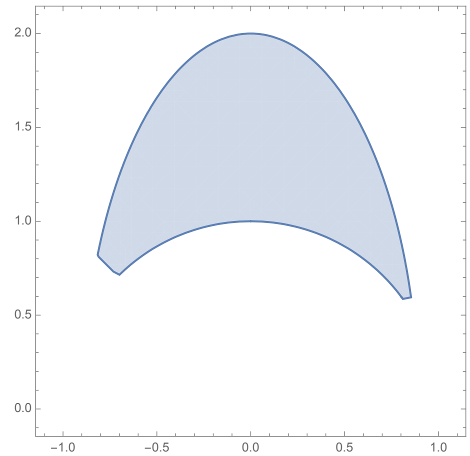

Figure 17: L'insieme Ω.

La prima, la terza e la quarta condizione ci dicono che

$$\rho \geq 1 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right] \,,$$

mentre la seconda condizione si riscrive come

$$\frac{1}{4}\rho^2 + \rho^2 \cos^2\theta \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \leq \left(\frac{4}{1+4\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Siamo quindi arrivati a

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \,:\, 0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \,, \rho \geq 1 \,,\, \rho \leq \left(\frac{4}{1+4\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

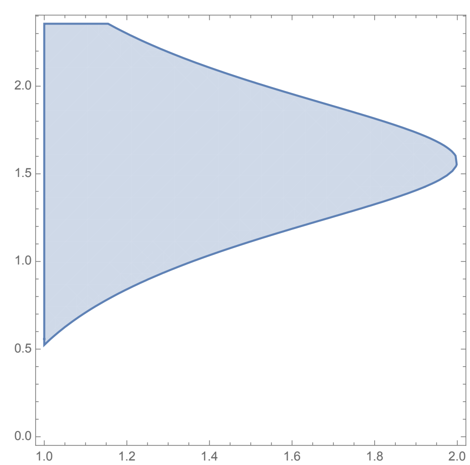

Figure 18: L'insieme S.

L'insieme S è rappresentato nella figura 18 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare $\bar\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{4}{1+4\cos^2\bar\theta} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\bar\theta = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \bar\theta = \frac{\pi}{6}\,,$$

e quindi

$$S = \left\{ (\rho, \theta)\ :\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi\,, 1 \le \rho \le \left(\frac{4}{1+4\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S \rho \sin\theta\ d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\int_1^{\left(\frac{4}{1+4\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} \rho\sin\theta\ d\rho \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{2\sin\theta}{1+4\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\sin\theta \right) d\theta =$$

$$= \left(-\arctan(2\cos\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta \right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3}{4}\pi} = \arctan\sqrt{2} + \arctan\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 = z^3 - z^5\,,\ z \ge 0 \right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

Si tratta di una superficie di rotazione che si ottiene ruotando intorno all'asse z il grafico della funzione $g(t) = \sqrt{t^3 - t^5}$. Dalla definizione di g si vede che i punti di Σ soddisfano $z \in [0,1]$. Il grafico di g in $[0,1]$ è rappresentato nella figura 19.

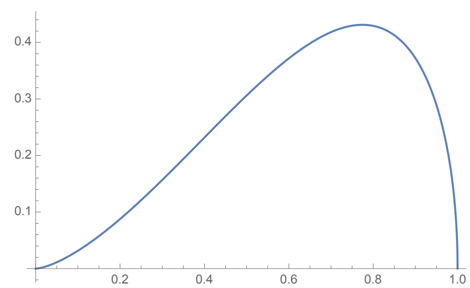

Figure 19: Il grafico di g.

Se adesso lo disegniamo sul piano (y,z) come grafico di $y = g(z)$ (ossia si inverte il ruolo degli assi rispetto alla figura 19) e lo facciamo ruotare intorno all'asse z, otteniamo il disegno di Σ in figura 20.

Una parametrizzazione globale di Σ si ottiene allora dalla forma standard per le superfici di rotazione, ossia

$$\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \sigma(t,\theta) = (g(t)\,\cos\theta\,,\ g(t)\,\sin\theta\,,\ t)$$

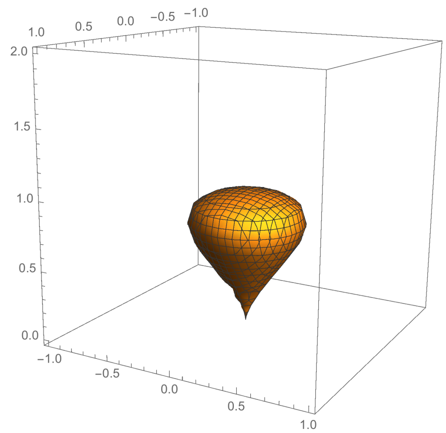

Figure 20: La superficie Σ.

con $g(t) = \sqrt{t^3 - t^5}$ e

$$D = \{(t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \,:\, t \in [0, 1]\} \,.$$

ii) calcolare il flusso uscente da Σ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(y-1)^2+z^2} \\ z(y-1) \\ x \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è chiusa, regolare (a meno dell'insieme di area nulla $\{(0, 0, 0)\}$), e orientabile, e il campo $\mathbf{F}$ è differenziabile sul suo dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 1, 0)\}$. Si vede dalla figura 20 che U, la parte interna alla superficie, è contenuta nel dominio del campo, possiamo quindi applicare il Teorema della Divergenza e ottenere

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz \,.$$

L'insieme U possiamo descriverlo per strati come

$$U = \{(x, y, z) \,:\, z \in [0, 1] \,, (x, y) \in U_z\} \qquad \text{dove} \quad U_z = \left\{x^2 + y^2 \leq z^3 - z^5\right\} \,,$$

e la divergenza del campo è

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z \,.$$

Quindi

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{F}) = \iiint_U \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{U_z} z\, dxdy \right) dz =$$
$$= \int_0^1 \pi\, z\, (z^3 - z^5)\, dz = \pi \left(\frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{35}\, \pi \,.$$