Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 02-07-2014

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 y)$$

i) determinare il dominio e studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2\sqrt{x}}$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y-1)^2 \le 1\,,\; y \ge 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\sin(t),\, \left(t + \frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

i) dire se è regolare;

ii) usare il Teorema del Rotore per calcolare l'area dell'insieme D delimitato dal sostegno di (γ, I), dall'asse delle ascisse e dalla retta $x = 1$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = \arctan z\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ 0,\ 1\right)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le \arctan z\,,\; z \le 1\right\}\,.$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 y)$$

i) determinare il dominio e studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2\sqrt{x}}$$

Il dominio della funzione è determinato dall'insieme

$$\mathrm{Dom}(f) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 + x^2 y > 0\Big\}$$

ed è rappresentato nella figura 1.

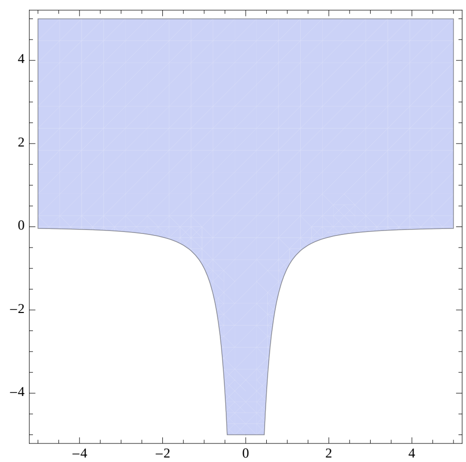

Figure 1: Il dominio di f.

Per studiare il limite, osserviamo innanzitutto che $(0,0)$ è un punto interno al dominio, e possiamo quindi considerare tutte le possibili direzioni di avvicinamento al punto. Iniziamo a studiare dunque il limite lungo le rette $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, e restringendoci ai punti per cui $x > 0$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\lambda x^3)}{x^2\sqrt{x}} = 0$$

dove abbiamo usato $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$. Se il limite esiste è dunque uguale a 0. Tuttavia, il limite notevole che abbiamo usato prima per il logaritmo, ci suggerisce che se usiamo la restrizione $\{y = \sqrt{x}\}$ con $x > 0$ otteniamo

$$\lim_{y=\sqrt{x},\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2\sqrt{x})}{x^2\sqrt{x}} = 1\,.$$

Dunque il limite non esiste.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x, y)$ *su*

$$\bar{\Omega} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \, , \; y \geq 1\right\} \, .$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è quello raffigurato nella Figura 2, e osserviamo che è interamente contenuto nel dominio della funzione.

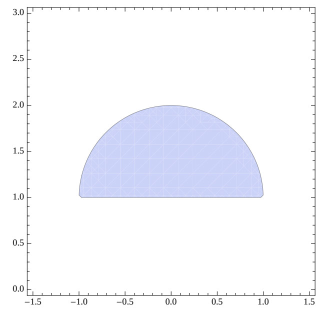

Figure 2: L'insieme $\bar{\Omega}$

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f è sempre differenziabile nei punti del dominio. Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi, che sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{2xy}{1+x^2y} = 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2y} = 0 \\ 1 + x^2y > 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova che i punti critici liberi sono tutti i punti della forma $P = (0, y_0)$.

Passiamo allo studio di f sul bordo. Il bordo di $\bar{\Omega}$ ha due spigoli

$$Q_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad Q_2 = (-1, 1)$$

e consiste di due pezzi, il segmento

$$\Gamma_1 = \{y = 1, -1 \leq x \leq 1\}$$

e la semi-circonferenza

$$\Gamma_2 = \{x^2 + (y-1)^2 = 1, \; y \geq 1\}$$

Studiamo il comportamento su Γ_1 con il metodo diretto, usando la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t, \, 1) \; , \qquad t \in [-1, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log(1 + t^2) \, , \qquad t \in [-1, 1]$$

Poiché $g_1'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, troviamo che l'unico punto critico è $t_0 = 0$. Aggiungendo i punti estremi del segmento $[-1,1]$, annotiamo dunque i punti di interesse

$$Q_3 = \gamma_1(0) = (0,1)\,, \quad \gamma_1(-1) = Q_2 \quad \text{e} \quad \gamma_1(1) = Q_1\,.$$

Per studiare il comportamento su Γ_2 usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Infatti Γ_2 è curva di livello della funzione $G(x,y) = x^2 + (y-1)^2$. Quindi dobbiamo quindi cercare soluzioni (x,y,λ) del sistema

$$\begin{cases} \frac{2xy}{1+x^2y} = \lambda 2x \\ \frac{x^2}{1+x^2y} = \lambda 2(y-1) \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

e considerare solo soluzioni con $y \geq 1$. Analizzando la prima equazione, otteniamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2y} = \lambda 2(y-1) \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{y}{1+x^2y} = \lambda \\ \frac{x^2}{1+x^2y} = \lambda 2(y-1) \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 0 \\ y \in \{0,2\} \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = \frac{y}{1+x^2y} \\ x^2 = 2y(y-1) \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 0 \\ y \in \{0,2\} \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = \frac{y}{1+x^2y} \\ x^2 = 2y(y-1) \\ 3y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Dal primo gruppo di soluzioni dobbiamo escludere $y = 0$, e dunque troviamo solo $(0,2)$ che, essendo $\lambda = 0$, è un punto critico libero, e infatti è del tipo P. Imponendo $y \geq 1$ nel secondo sotto-sistema, troviamo che l'ultima equazione ha soluzione $y = \frac{4}{3}$, e dunque troviamo i punti critici vincolati

$$Q_4 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\, \frac{4}{3}\right) \quad \text{e} \quad Q_5 = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\, \frac{4}{3}\right)\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = f(0,y_0) = 0\,, \quad f(Q_1) = f(Q_2) = \log(2)\,, \quad f(Q_3) = 0\,, \quad f(Q_4) = f(Q_5) = \log\left(\frac{59}{27}\right)$$

per cui il massimo di f è $\log\left(\frac{59}{27}\right)$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva* (γ, I)*, con* $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\sin(t), \Big(t + \frac{\pi}{2}\Big)^2\Big)$$

i) dire se è regolare;

Dobbiamo vedere se esiste $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tale che $\gamma'(t) = 0$. Derivando le componenti di $\gamma(t)$ otteniamo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big) \end{pmatrix}$$

che si annulla solo per $t = -\frac{\pi}{2}$. Essendo questo valore non interno a I, concludiamo che γ è regolare.

ii) usare il Teorema del Rotore per calcolare l'area dell'insieme D *delimitato dal sostegno di* (γ, I)*, dall'asse delle ascisse e dalla retta* $x = 1$*.*

Studiamo la curva (γ, I). La curva non è chiusa e il suo sostegno è l'insieme nella figura 3, con estremi $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (-1, 0) = P$ e $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (1, \pi^2) = Q$.

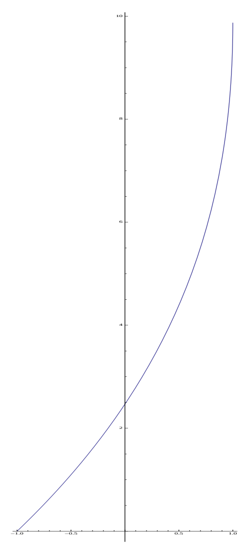

Figure 3: Il sostegno della curva (γ, I)

Usando il Teorema del Rotore si ottiene

$$\text{Area(D)} = \iint_D 1 dxdy = L(\mathbf{F}, \partial^+ D)$$

per campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ definito su $\mathbb{R}^2$ con la proprietà che $\text{rot}(\mathbf{F}) = 1$, e $\partial^+ D$ è il bordo di D parametrizzato in senso anti-orario. Dalla definizione di D troviamo quindi che

$$\partial D = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

con Γ dato dal sostegno di (γ, I),

$$\Gamma_1 = \{y = 0\,,\ -1 \leq x \leq 1\}$$

parametrizzato da

$$\gamma_1(t) = (t,\, 0)\ , \qquad t \in [-1, 1]\ ,$$

e

$$\Gamma_2 = \left\{ x = 1\, ,\, 0 \le y \le \pi^2 \right\}$$

parametrizzato da

$$\gamma_2(t) = (1,\, t)\ , \qquad t \in \left[0, \pi^2\right]\ .$$

Dalla scelta delle parametrizzazioni segue che

$$\text{Area(D)} = L(\mathbf{F}, \partial^+ D) = L(\mathbf{F}, \gamma_1) + L(\mathbf{F}, \gamma_2) - L(\mathbf{F}, \gamma)\ =$$

$$= \int_{-1}^{1} F_1(t, 0)\, dt + \int_0^{\pi^2} F_2(1, t)\, dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(F_1(\gamma(t)) \cos(t) + 2\, F_2(\gamma(t))(t + \frac{\pi}{2}) \Big)\, dt$$

Per semplificare i calcoli, scegliamo $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$, per cui sostituendo nei tre integrali troviamo

$$\text{Area(D)} = 0 + \int_0^{\pi^2} 1\, dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\, (t + \frac{\pi}{2}) \sin(t)\, dt =$$

$$= \pi^2 - 2\Big(\sin(t) - t\cos(t) \Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi \cos(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 - 4\, .$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 = \arctan z \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ 0,\ 1 \right)$;

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \arctan z$$

che verifica

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -\frac{1}{1+z^2} \end{pmatrix} \quad \text{e in particolare} \quad \nabla F(P) = \nabla F \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ 0,\ 1 \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ne \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$\sqrt{\pi} \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) - \frac{1}{2}(z - 1) = 0\, .$$

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 \le \arctan z\, ,\ z \le 1 \right\}$$

Si tratta di un solido di rotazione della forma

$$\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,a\le z\le b\,,\,x^2+y^2\le g^2(z)\big\}$$

dove $b=1$, $g(z)=\sqrt{\arctan z}$, e dunque $z\ge 0$, ossia $a=0$. Possiamo quindi applicare la formula

$$\mathrm{Volume}(V)=\int_a^b \pi g^2(z)\,dz=\int_0^1 \pi\arctan z\,dz=\pi\Big(z\arctan z-\frac{1}{2}\log(1+z^2)\Big)\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}\,\log 2\,.$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 02-07-2014

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log(1 + xy^2)$$

i) determinare il dominio e studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{y\sqrt{x}}$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le 1\,,\ x \ge 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big)^2, \sin(t)\right)$$

i) dire se è regolare;

ii) usare il Teorema del Rotore per calcolare l'area dell'insieme D delimitato dal sostegno di (γ, I), dall'asse delle ordinate e dalla retta $y = 1$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = \log(1+z)\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ e-1\right)$;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le \log(1+z)\,,\ z \le e-1\right\}\,.$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x, y) = \log(1 + xy^2)$$

i) determinare il dominio e studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{y\sqrt{x}}$$

Il dominio della funzione è determinato dall'insieme

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 + xy^2 > 0\right\}$$

ed è rappresentato nella figura 4.

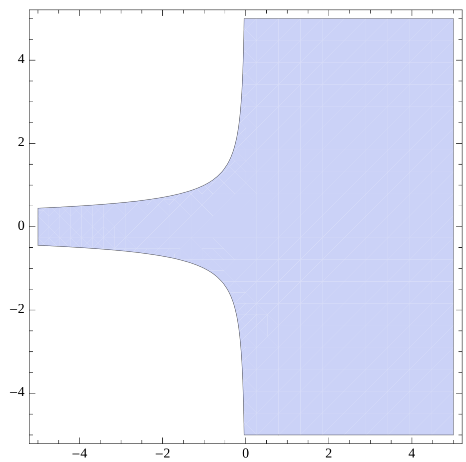

Figure 4: Il dominio di f.

Per studiare il limite, osserviamo innanzitutto che $(0, 0)$ è un punto interno al dominio, e possiamo quindi considerare tutte le possibili direzioni di avvicinamento al punto, restringendoci ai punti per cui $x > 0$.

Iniziamo a studiare dunque il limite lungo le rette $\{y = \lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{y\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + \lambda^2 x^3)}{\lambda x\sqrt{x}} = 0$$

dove abbiamo usato $\log(1 + t) \sim t$ per $t \to 0$. Se il limite esiste è dunque uguale a 0. Proviamo a dimostrarlo scrivendo

$$0 \leq \left|\frac{f(x, y)}{y\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|xy^2|}{|y\sqrt{x}|} = |y\sqrt{x}|$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza $\log(1+t) \leq t$ per $t \geq 0$. Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y\sqrt{x}| = 0$ si ha in effetti che il limite esiste ed è 0.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x, y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \le 1\,,\; x \ge 1\right\}\,.$$

L'insieme $\bar{\Omega}$ è quello raffigurato nella Figura 5, e osserviamo che è interamente contenuto nel dominio della funzione.

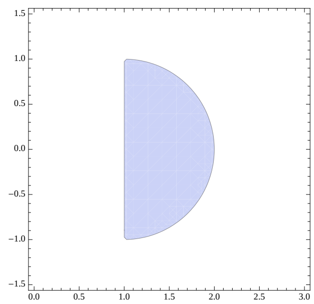

Figure 5: L'insieme $\bar{\Omega}$

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f è sempre differenziabile nei punti del dominio. Passiamo quindi alla ricerca dei punti critici liberi, che sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2}{1+x^2 y} = 0 \\ \frac{2xy}{1+x^2 y} = 0 \\ 1 + xy^2 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova che i punti critici liberi sono tutti i punti della forma $P = (x_0, 0)$.

Passiamo allo studio di f sul bordo. Il bordo di $\bar{\Omega}$ ha due spigoli

$$Q_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad Q_2 = (1, -1)$$

e consiste di due pezzi, il segmento

$$\Gamma_1 = \{x = 1, -1 \le y \le 1\}$$

e la semi-circonferenza

$$\Gamma_2 = \{(x-1)^2 + y^2 = 1,\; x \ge 1\}$$

Studiamo il comportamento su Γ_1 con il metodo diretto, usando la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (1,\, t)\ , \qquad t \in [-1, 1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log(1 + t^2)\,, \qquad t \in [-1, 1]$$

Poiché $g_1'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, troviamo che l'unico punto critico è $t_0 = 0$. Aggiungendo i punti estremi del segmento $[-1, 1]$, annotiamo dunque i punti di interesse

$$Q_3 = \gamma_1(0) = (1, 0)\,, \quad \gamma_1(-1) = Q_2 \quad \text{e} \quad \gamma_1(1) = Q_1\,.$$

Per studiare il comportamento su Γ_2 usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Infatti Γ_2 è curva di livello della funzione $G(x, y) = (x-1)^2 + y^2$. Quindi dobbiamo quindi cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2}{1+x^2y} = \lambda 2(x-1) \\ \frac{2xy}{1+x^2y} = \lambda 2y \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e considerare solo soluzioni con $x \geq 1$. Analizzando la seconda equazione, otteniamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{y^2}{1+x^2y} = \lambda 2(x-1) \\ y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{y^2}{1+x^2y} = \lambda 2(x-1) \\ \frac{x}{1+x^2y} = \lambda \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x \in \{0, 2\} \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} y \neq 0 \\ y^2 = 2x(x-1) \\ \frac{x}{1+x^2y} = \lambda \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ x \in \{0, 2\} \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} y \neq 0 \\ y^2 = 2x(x-1) \\ \lambda = \frac{x}{1+x^2y} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

Dal primo gruppo di soluzioni dobbiamo escludere $x = 0$, e dunque troviamo solo $(2, 0)$ che, essendo $\lambda = 0$, è un punto critico libero, e infatti è del tipo P. Imponendo $x \geq 1$ nel secondo sotto-sistema, troviamo che l'ultima equazione ha soluzione $x = \frac{4}{3}$, e dunque troviamo i punti critici vincolati

$$Q_4 = \left(\frac{4}{3},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \quad \text{e} \quad Q_5 = \left(\frac{4}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\,.$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(P) = f(x_0, 0) = 0\,, \quad f(Q_1) = f(Q_2) = \log(2)\,, \quad f(Q_3) = 0\,, \quad f(Q_4) = f(Q_5) = \log\left(\frac{59}{27}\right)$$

per cui il massimo di f è $\log\left(\frac{59}{27}\right)$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la curva* (γ, I)*, con* $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\left(t + \frac{\pi}{2}\right)^2, \, \sin(t)\right)$$

i) dire se è regolare;

Dobbiamo vedere se esiste $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tale che $\gamma'(t) = 0$. Derivando le componenti di $\gamma(t)$ otteniamo

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

che si annulla solo per $t = -\frac{\pi}{2}$. Essendo questo valore non interno a I, concludiamo che γ è regolare.

ii) usare il Teorema del Rotore per calcolare l'area dell'insieme D *delimitato dal sostegno di* (γ, I)*, dall'asse delle ordinate e dalla retta* $y = 1$*.*

Studiamo la curva (γ, I). La curva non è chiusa e il suo sostegno è l'insieme nella figura 6, con estremi $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (0, -1) = P$ e $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (\pi^2, 1) = Q$.

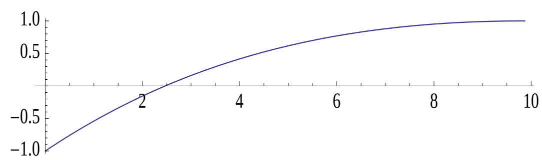

Figure 6: Il sostegno della curva (γ, I)

Usando il Teorema del Rotore si ottiene

$$\text{Area(D)} = \iint_D 1 dxdy = L(\mathbf{F}, \partial^+ D)$$

per campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ definito su $\mathbb{R}^2$ con la proprietà che $\text{rot}(\mathbf{F}) = 1$, e $\partial^+ D$ è il bordo di D parametrizzato in senso anti-orario. Dalla definizione di D troviamo quindi che

$$\partial D = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

con Γ dato dal sostegno di (γ, I),

$$\Gamma_1 = \{x = 0\,,\ -1 \leq y \leq 1\}$$

parametrizzato da

$$\gamma_1(t) = (0,\, t)\ , \qquad t \in [-1, 1]\ ,$$

e

$$\Gamma_2 = \left\{y = 1\,,\ 0 \leq x \leq \pi^2\right\}$$

parametrizzato da

$$\gamma_2(t) = (t,\, 1)\ , \qquad t \in \left[0, \pi^2\right]\ .$$

Dalla scelta delle parametrizzazioni segue che

$$\text{Area(D)} = L(\mathbf{F}, \partial^+ D) = -L(\mathbf{F}, \gamma_1) - L(\mathbf{F}, \gamma_2) + L(\mathbf{F}, \gamma)\ =$$

$$= -\int_{-1}^{1} F_2(0,t)\,dt - \int_0^{\pi^2} F_1(t,1)\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(2\,F_1(\gamma(t))(t+\frac{\pi}{2}) + F_2(\gamma(t))\cos(t)\Big)\,dt$$

Per semplificare i calcoli, scegliamo $\mathbf{F}(x,y) = (-y,0)$, per cui sostituendo nei tre integrali troviamo

$$\text{Area(D)} = 0 + \int_0^{\pi^2} 1\,dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,(t+\frac{\pi}{2})\sin(t)\,dt =$$

$$= \pi^2 - 2\Big(\sin(t) - t\cos(t)\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi\cos(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 - 4\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2 = \log(1+z)\big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ e-1\Big)$*;*

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2+y^2-\log(1+z)$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -\frac{1}{1+z}\end{pmatrix} \quad \text{e in particolare} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ e-1\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -\frac{1}{e}\end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$\sqrt{2}\,\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\,\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{e}(z-e+1) = 0\,.$$

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2\le\log(1+z)\,,\ z\le e-1\big\}\ .$$

Si tratta di un solido di rotazione della forma

$$\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,a\le z\le b\,,\,x^2+y^2\le g^2(z)\big\}$$

dove $b = e-1$, $g(z) = \sqrt{\log(1+z)}$, e dunque $z\ge 0$, ossia $a=0$. Possiamo quindi applicare la formula

$$\text{Volume}(V) = \int_a^b \pi g^2(z)\,dz = \int_0^{e-1}\pi\log(1+z)\,dz = \pi\Big((1+z)\log(1+z) - z\Big)\Big|_0^{e-1} = \pi\,.$$