Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 02-07-2011

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} (\bar{z}-1)^3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\bar{z}-1) \\ |z| \geq |z-1-i| \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione cartesiana del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (8 punti) Trovare un supplementare V in $\mathbb{R}^4$ del sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e determinare una base dell'intersezione di V con il sottospazio

$$W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$$

Esercizio 4. (6 punti) Trovare la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ data da

$$T(p(t)) = 2p(t) - p(t+1)$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\, 1+t\}$.

Esercizio 5. (6 punti) Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e rispetto a quale base:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 02-07-2011

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} (\bar{z}+1)^3 = i\,(\bar{z}+1) \\ |z| \leq |z+1-i| \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione cartesiana del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (8 punti) Trovare un supplementare V in $\mathbb{R}^4$ del sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \;:\; \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e determinare una base dell'intersezione di V con il sottospazio

$$W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

Esercizio 4. (6 punti) Trovare la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ data da

$$T(p(t)) = p(t) - 2p(t+1)$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\, 1+t\}$.

Esercizio 5. (6 punti) Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e rispetto a quale base:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 02-07-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} (\bar{z}+1)^3 = -i\,(\bar{z}+1) \\ |z| \geq |z+1-i| \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti) Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione cartesiana del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. (8 punti) Trovare un supplementare V in $\mathbb{R}^4$ del sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e determinare una base dell'intersezione di V con il sottospazio

$$W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

Esercizio 4. (6 punti) Trovare la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ data da

$$T(p(t)) = p(t+1) + 2p(t)$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\, 1+t\}$.

Esercizio 5. (6 punti) Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e rispetto a quale base:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

- **Esercizio 1**

Compito 1. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} (\bar{z}-1)^3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\bar{z}-1) \\ |z| \geq |z-1-i| \end{cases}$$

Nella prima equazione del sistema poniamo $w = \bar{z} - 1$ e risolviamo

$$w^3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) w$$

Una soluzione è $w_1 = 0$. Ponendo poi $w \neq 0$ possiamo semplificare e troviamo, usando la forma esponenziale,

$$w^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Longrightarrow \quad w = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) \qquad k = 0, 1$$

Quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad z_3 = 1 + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

La seconda condizione del sistema si traduce in

$$d(z,0) \geq d(z, 1+i) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \geq 1$$

e quindi le soluzioni ammissibili sono z_1 e z_2.

Compito 2. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} (\bar{z}+1)^3 = i\,(\bar{z}+1) \\ |z| \leq |z+1-i| \end{cases}$$

Nella prima equazione del sistema poniamo $w = \bar{z} + 1$ e risolviamo

$$w^3 = i\,w$$

Una soluzione è $w_1 = 0$. Ponendo poi $w \neq 0$ possiamo semplificare e troviamo, usando la forma esponenziale,

$$w^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Longrightarrow \quad w = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \qquad k = 0, 1$$

Quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad z_3 = -1 + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

La seconda condizione del sistema si traduce in

$$d(z,0) \leq d(z, -1+i) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \geq -1$$

e quindi le soluzioni ammissibili sono z_1 e z_2.

Compito 3. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} (\bar{z}+1)^3 = -i\,(\bar{z}+1) \\ |z| \geq |z+1-i| \end{cases}$$

Nella prima equazione del sistema poniamo $w = \bar{z}+1$ e risolviamo

$$w^3 = -i\,w$$

Una soluzione è $w_1 = 0$. Ponendo poi $w \neq 0$ possiamo semplificare e troviamo, usando la forma esponenziale,

$$w^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \Longrightarrow \quad w = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \qquad k = 0,1$$

Quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -1 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad z_3 = -1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

La seconda condizione del sistema si traduce in

$$d(z,0) \geq d(z,-1+i) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \leq -1$$

e quindi le soluzioni sono tutte ammissibili.

- **<u>Esercizio 2</u>**

Compito 1. *Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione cartesiana del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det(A) = 2k^2$, quindi per $k \neq 0$ la matrice definisce un'applicazione lineare invertibile. Allora per $k \neq 0$ si ha $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^4$ e $\ker(L_A) = \{\underline{0}\}$, che in forma cartesiana si possono scrivere

$$\mathrm{Im}(L_A) = \{0 = 0\}, \qquad \ker(L_A) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Nel caso $k = 0$, riduciamo la matrice A a scala. Si ottiene

$$A \sim S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi troviamo $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$ e

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

mentre per il nucleo si trova $\dim(\ker(L_A)) = 2$ e

$$\ker(L_A) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Notare che non abbiamo avuto bisogno di risolvere il sistema $S\underline{x} = \underline{0}$, visto che si richiedeva l'equazione cartesiana.

Compito 2. *Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione cartesiana del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det(A) = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$, quindi per $k \neq 1$ la matrice definisce un'applicazione lineare invertibile. Allora per $k \neq 1$ si ha $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^4$ e $\ker(L_A) = \{\underline{0}\}$, che in forma cartesiana si possono scrivere

$$\mathrm{Im}(L_A) = \{0 = 0\}, \qquad \ker(L_A) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Nel caso $k = 1$, riduciamo la matrice A a scala e *...continuare come per il compito 1.*

Compito 3. *Determinare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione cartesiana del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante di A si trova $\det(A) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, quindi per $k \neq -1$ la matrice definisce un'applicazione lineare invertibile. Allora per $k \neq -1$ si ha $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^4$ e $\ker(L_A) = \{\underline{0}\}$, che in forma cartesiana si possono scrivere

$$\mathrm{Im}(L_A) = \{0 = 0\}, \qquad \ker(L_A) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Nel caso $k = -1$, riduciamo la matrice A a scala e *...continuare come per il compito 1.*

- <u>**Esercizio 3**</u>

Compito 1. *Trovare un supplementare V in $\mathbb{R}^4$ del sottospazio vettoriale*

$$U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e determinare una base dell'intersezione di V con il sottospazio

$$W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$$

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C, osservando che è già ridotta a scala

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$. Per ottenere un supplementare di U, che avrà dimensione 2, completiamo la base di U a una base di $\mathbb{R}^4$ e poi consideriamo solo i vettori della base canonica che abbiamo aggiunto. Scriviamo quindi la matrice le cui colonne sono la base di U e la base canonica di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che un supplementare è dato da

$$V = \mathrm{Span}(e_1, e_2) = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Per determinare ora una base di $V \cap W$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

e si ottiene

$$V \cap W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Compito 2. *Trovare un supplementare V in $\mathbb{R}^4$ del sottospazio vettoriale*

$$U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e determinare una base dell'intersezione di V con il sottospazio

$$W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C, osservando che è già ridotta a scala

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$. Per ottenere un supplementare di U, che avrà dimensione 2, completiamo la base di U a una base di $\mathbb{R}^4$ e poi consideriamo solo i vettori della base canonica che abbiamo aggiunto. Scriviamo quindi la matrice le cui colonne sono la base di U e la base canonica di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che un supplementare è dato da

$$V = \operatorname{Span}(e_1, e_2) = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Per determinare ora una base di $V \cap W$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

e si ottiene

$$V \cap W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Compito 3. *Trovare un supplementare V in $\mathbb{R}^4$ del sottospazio vettoriale*

$$U = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e determinare una base dell'intersezione di V con il sottospazio

$$W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C, osservando che è già ridotta a scala

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$. Per ottenere un supplementare di U, che avrà dimensione 2, completiamo la base di U a una base di $\mathbb{R}^4$ e poi consideriamo solo i vettori della base canonica che abbiamo aggiunto. Scriviamo quindi la matrice le cui colonne sono la base di U e la base canonica di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che un supplementare è dato da

$$V = \operatorname{Span}(e_1, e_2) = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Per determinare ora una base di $V \cap W$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

e si ottiene

$$V \cap W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

- **Esercizio 4**

Compito 1. *Trovare la matrice associata all'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ data da*

$$T(p(t)) = 2p(t) - p(t+1)$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, 1+t\}$.

Innanzitutto osserviamo che $\dim \mathbb{R}_1[t] = 2$, quindi la matrice A da cercare è una matrice 2×2, che possiamo scrivere con incognite

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Inoltre dalla definizione di matrice associata a un'applicazione lineare rispetto a basi in arrivo e partenza date, si deve avere che le colonne di A rappresentano i coefficienti delle combinazioni lineari delle immagini dei vettori della base di partenza rispetto alla base di arrivo. Nel nostro caso la base di partenza e la base di arrivo coincidono, quindi le incognite a, b, c, d della matrice devono verificare

$$T(1) = a \cdot 1 + c \cdot (1+t)$$

$$T(1+t) = b \cdot 1 + d \cdot (1+t)$$

Quindi poiché

$$T(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \qquad T(1+t) = 2 \cdot (1+t) - \Big(1 + (t+1)\Big) = t$$

si deve verificare

$$1 = a + c + ct \quad \Longrightarrow \quad a = 1,\ c = 0$$

$$t = b + d + dt \quad \Longrightarrow \quad b = -1,\ d = 1$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compito 2. *Trovare la matrice associata all'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ *data da*

$$T(p(t)) = p(t) - 2p(t+1)$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\, 1+t\}$.

*Seguiamo la teoria esposta nella correzione del compito 1...*poi troviamo che

$$T(1) = 1 - 2 \cdot 1 = -1, \qquad T(1+t) = (1+t) - 2\Big(1 + (t+1)\Big) = -3 - t$$

Quindi si deve verificare

$$-1 = a + c + ct \quad \Longrightarrow \quad a = -1,\ c = 0$$

$$-3 - t = b + d + dt \quad \Longrightarrow \quad b = -2,\ d = -1$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Compito 3. *Trovare la matrice associata all'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ *data da*

$$T(p(t)) = p(t+1) + 2p(t)$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\, 1+t\}$.

*Seguiamo la teoria esposta nella correzione del compito 1...*poi troviamo che

$$T(1) = 1 + 2 \cdot 1 = 3, \qquad T(1+t) = \Big(1 + (t+1)\Big) + 2 \cdot (1+t) = 4 + 3t$$

Quindi si deve verificare

$$3 = a + c + ct \quad \Longrightarrow \quad a = 3,\ c = 0$$

$$4 + 3t = b + d + dt \quad \Longrightarrow \quad b = 1,\ d = 3$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Esercizio 5**

Compito 1. *Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e rispetto a quale base:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice A. Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 5t^2 + 8t - 4) = -(t-2)^2(t-1)$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1, 2\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_1 = \dim\ker(A - I) = \dim\ker \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$g_2 = \dim\ker(A - 2I) = \dim\ker \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

anche se per l'autovalore 1, poiché $m_1 = 1$, si può subito concludere che $g_1 = m_1 = 1$. Quindi poiché $m_1 + m_2 = 3$ e $g_1 = m_1$, $g_2 = m_2$, si conclude che la matrice A è diagonalizzabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende diagonale avrà un autovettori relativo all'autovalore 1 e due autovettori relativi all'autovalore 2. Si trova che

$$(A - I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$(A - 2I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Matrice B. Dobbiamo cercare gli autovalori di B e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di B

$$p_B(t) = \det(B - tI) = -(t^3 - 2t^2 + 4t - 8) = -(t-2)(t^2 + 4)$$

Quindi B ha un solo autovalore reale $\{2\}$. Se ne deduce che la matrice non è triangolabile, e quindi neanche diagonalizzabile.

Compito 2. *Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e rispetto a quale base:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice A. Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 2t^2 + t - 2) = -(t-2)(t^2+1)$$

Quindi A ha un solo autovalore reale $\{2\}$. Se ne deduce che la matrice non è triangolabile, e quindi neanche diagonalizzabile.

Matrice B. Dobbiamo cercare gli autovalori di B e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di B

$$p_B(t) = \det(B - tI) = -(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) = -(t-2)(t-1)^2$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1, 2\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_1 = \dim\ker(B - I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_2 = \dim\ker(B - 2I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

anche se per l'autovalore 2, poiché $m_2 = 1$, si può subito concludere che $g_2 = m_2 = 1$. Quindi poiché $m_1 + m_2 = 3$ e $g_1 = m_1$, $g_2 = m_2$, si conclude che la matrice B è diagonalizzabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende diagonale avrà due autovettori relativi all'autovalore 1 e un autovettore relativo all'autovalore 2. Si trova che

$$(B - I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$(B - 2I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Compito 3. *Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e rispetto a quale base:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice A. Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 5t^2 + 7t - 3) = -(t-1)^2(t-3)$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1, 3\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = 2$ e $m_3 = 1$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_1 = \dim \ker(A - I) = \dim \ker \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_3 = \dim \ker(A - 3I) = \dim \ker \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

anche se per l'autovalore 3, poiché $m_3 = 1$, si può subito concludere che $g_3 = m_3 = 1$. Quindi poiché $m_1 + m_3 = 3$ e $g_1 = m_1$, $g_3 = m_3$, si conclude che la matrice A è diagonalizzabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende diagonale avrà due autovettori relativi all'autovalore 1 e un autovettore relativo all'autovalore 3. Si trova che

$$(A - I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$(A - 3I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>Matrice B</u>. Dobbiamo cercare gli autovalori di B e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di B

$$p_B(t) = \det(B - tI) = -(t^3 - 2t^2 + 9t - 18) = -(t - 2)(t^2 + 9)$$

Quindi B ha un solo autovalore reale $\{2\}$. Se ne deduce che la matrice non è triangolabile, e quindi neanche diagonalizzabile.